

# 88132) חשבון אינפיניטסימלי 1 | מבחן תשע"ו מועד א'

הצעת פתרון | לירן מנצורי יונתן סמידוברסקי

## שאלה 1

הוכח את משפט ויירשטראס השני: כל פונקציה רציפה בקטע סגור מקבלת מקסימום ומינימום שם.

תהי  $f$  רציפה ב  $[a, b]$ , ראשית נראה שחסומה בקטע:  
נניח בשלילה שהקב'  $\{f(x) | x \in [a, b]\}$  אינה חסומה מלעיל  
אז לכל  $n$  קיים  $a \leq x_n \leq b$  כך ש  $f(x_n) > n$   
אבל  $\{x_n\}$  חסומה לכן לפי בולצאנו ויירשטראס, יש לה ת"ס מתכנסת  $x_{n_k} \rightarrow x_0$  וכן  $a \leq x_0 \leq b$   
מרציפות  $f$  נקבל  $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0)$ , וזו סתירה כי  $f(x_n) \rightarrow \infty$  והיא תת סדרה שלו.  
כעת נראה שזהו המקסימום  
מהוכחת חסומה מלעיל נקבל כי קיים  $s := \sup\{f(x) | x \in [a, b]\}$   
ניקח סדרה  $a \leq x_n \leq b, s \geq f(x_n) \rightarrow s$  לכל  $n$   
יש לה ת"ס מתכנסת  $x_{n_k} \rightarrow c$  ואז  $f(x_{n_k}) \rightarrow f(c)$  מרציפות,  
ולפי יחידות הגבול  $f(c) = s$  והיא נק' מקסימום גלובלית, באופן דומה מוכיחים מינימום.

## שאלה 2

לכל אחד מהטורים הבאים, קבע האם הוא מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי, או מתבדר.

א.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{-3n^2+62n+1}{4n^5-26n^2+7}$

ב.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

ג.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{10n+9 \sin n}$

## סעיף א

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{-3n^2 + 62n + 1}{4n^5 - 26n^2 + 6}$$

נראה התכנסות בהחלט

$$\frac{|-3n^2 + 62n + 1|}{|4n^5 - 26n^2 + 6|} \leq \frac{|-3n^2| + |62n + 1|}{|4n^5 - 26n^2 + 6|} \leq \frac{4n^2}{|4n^5 - 26n^2 + 6|}$$

כאשר המעבר האחרון קורה החל משלב מסויים ( $n \geq 8$ ) בצורה דומה מתקיים שהחל משלב מסויים  $4n^5 - 26n^2 + 6 > 0$  ואז

$$\frac{4n^2}{4n^5 - 26n^2 + 6} \leq \frac{4n^2}{4n^5} = \frac{1}{n^3}$$

סך הכל עושים מבחן ההשוואה של זנב הטור ושל הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$  אשר מתכנס, מתכנס בהחלט וסיימנו.

## סעיף ב

אפשר לראות שהטור חיובי, ולכן מתכנס בהחלט או מתבדר

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

כאשר המעבר השני נובע מכך ש:  $n \geq 1 \Rightarrow n! \geq 1 \Rightarrow \sqrt[n]{n!} \geq 1$  ולכן מתבדר מהשוואה עם הטור ההרמוני

## סעיף ג

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{10n + 9\sin(n)}$$

נשים לב שהמכנה  $10n + 9\sin(n) \geq 10n - 9 > 0$  בתחום שלנו ( $n \geq 1$ )  
ונראה לא מתכנס בהחלט

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10n + 9\sin(n)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10n + 9} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{19n} = \infty$$

קעת על מנת להוכיח התכנסות בתנאי, ניעזר בליבניץ ונוכיח ש  $a_n := \frac{1}{10n + 9\sin(n)}$  יורדת ומתכנסת לאפס.  
התכנסות לאפס:

$$0 \leftarrow \frac{1}{19n} \leq \frac{1}{10n + 9} \leq \frac{1}{10n + 9\sin(n)} \leq \frac{1}{10n - 9} \leq \frac{1}{10n} \rightarrow 0$$

$a_n$  יורדת,  
שקול ללהוכיח שהמכנה עולה, כלומר

$$10(n + 1) + 9\sin(n + 1) \geq 10n + 9\sin(n)$$

$$10 \geq 9(\sin(n) - \sin(n + 1)) = 9 \cdot 2\sin\left(\frac{n - (n + 1)}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{n + (n + 1)}{2}\right)$$

$$9 \cdot 2\sin\left(\frac{-1}{2}\right) \cdot \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) = -8.63 \cdot \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

אבל  $-1 \leq \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \leq 1$  וסיימנו, מתכנס בתנאי.

### שאלה 3

תהי  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  סדרה שמתכנסת לגבול  $a$  הוכח שאם

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

לכל מספר טבעי  $n$ , אזי מתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a.$$

נראה לפי הגדרת הגבול, יהי  $\epsilon > 0$  נמצא  $N$  שממנו ואילך

$$|b_n - a| \leq \epsilon$$

אבל מהנתון, בעבור אותו  $\epsilon$  קיים  $N'$  כך שלכל  $n \geq N'$  מתקיים  $|a_n - a| \leq \epsilon$   
ניקח  $N := N'$  ונסתכל על זנב הסדרה, כלומר  $n \geq N$

$$|b_n - a| = \left| \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} - a \right| = \left| \frac{a_1 + \dots + an - an}{n} \right|$$

$$= \left| \frac{(a_1 - a) + \dots + (a_m - a)}{n} \right| = \left| \frac{(a_1 - a) + \dots + (a_N - a) + (a_{N+1} - a) + \dots + (a_m - a)}{n} \right|$$

ומאי שיוויון המשולש

$$\leq \frac{1}{n} (|(a_1 - a) + \dots + (a_{N-1} - a)| + |(a_N - a) + (a_{N+1} - a) + \dots + (a_m - a)|)$$

$$\leq \frac{1}{n} |\epsilon + \dots + \epsilon| \leq \frac{1}{n} \cdot n\epsilon = \epsilon$$

ולכן סיימנו.

#### שאלה 4

- א. תהי  $A \subseteq \mathbb{R}$ . הגדר את המינוח "הפונקציה  $f(x)$  רציפה במידה שווה בתחום  $A$ ".
- ב. תהי  $f(x)$  פונקציה רציפה במידה שווה בכל  $\mathbb{R}$ . הוכח שהפונקציה  $f(x + 5776) - f(x)$  הינה חסומה.

#### סעיף א

$f$  תיקרא פונקציה רציפה במידה שווה בתחום  $A$  אם  $A \subseteq \text{dom}(f)$  וגם

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in A, |x_1 - x_2| \leq \delta : |f(x_1) - f(x_2)| \leq \epsilon$$

(כתבתי את אחד הניסוחים השקולים שלה שיהיה לנו נוח יותר לעבוד איתו)

#### סעיף ב

מהנתון בפרט ניקח  $\epsilon := 1$ , קיימת  $\delta > 0$  כך שלכל  $|x - y| < \delta$  מתקיים  $|f(x) - f(y)| \leq 1$   
יהי  $k \in \mathbb{N}$  כך ש  $\frac{1}{k} < \delta$ , יהי  $x \in \mathbb{R}$  כעת

$$|f(x + 5776) - f(x)|$$

$$= |f(x + 5776) - f(x + 5776 - \frac{1}{k}) + f(x + 5776 - \frac{1}{k}) - f(x + 5776 - \frac{2}{k}) + f(x + 5776 - \frac{2}{k}) - \dots - f(x + \frac{1}{k}) + f(x + \frac{1}{k}) - f(x)|$$

ומאי שיויון המשולש

$$\leq |f(x + 5776) - f(x + 5776 - \frac{1}{k})| + |f(x + 5776 - \frac{1}{k}) - f(x + 5776 - \frac{2}{k})| + \dots + |f(x + \frac{2}{k}) - f(x + \frac{1}{k})| + |f(x + \frac{1}{k}) - f(x)|$$

כעת מרציפות במידה שווה של  $f$

$$\leq 5776k\epsilon = 5776k$$

מצאנו חסמים מלרע ומלעיל וסיימנו (הרי חוסם את הערך המוחלט)

## שאלה 5

תהי פונקציה רציפה בקטע  $[a, b]$  וגזירה בכל נקודה פנימית של הקטע הזה. נניח כי  $f'(c) \neq 1$  לכל  $c \in (a, b)$ . נקודה  $c$  נקראית נקודת שבת של הפונקציה  $f(x)$  אם  $f(c) = c$ . הוכח כי לפונקציה  $f(x)$  יש לכל היותר נקודת שבת אחת בקטע  $[a, b]$ .

הוכחה נניח בשלילה קיימות 2 נק' שבת:  $c_1, c_2$  שונות (לפחות שתיים) בעבורן:  $f(c_1) = c_1, f(c_2) = c_2$ . כעת נניח בלי הגבלת הכלליות ש  $c_2 > c_1$ , ונתבונן בתחום  $(c_1, c_2)$  לפי משפט הערך הממוצע של לגרנז' מתקיים שקיימת  $c' \in (c_1, c_2)$  בקטע  $c'$  כך ש

$$f'(c') = \frac{f(c_2) - f(c_1)}{c_2 - c_1}$$

אבל

$$\frac{f(c_2) - f(c_1)}{c_2 - c_1} = \frac{c_2 - c_1}{c_2 - c_1} = 1$$

בסתירה לכך ש  $c' \in (a, b)$  ומקיימת  $f'(c) = 1$