פתרון תרגיל 5 – חשבון אינפיניטסימלי 2 למדעי המחשב

1. חשבו את האינטגרלים הבאים:

(א) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$

פתרון: נציב

$$x^2(1-t^2) = -2x \Leftarrow x^2+2x = x^2t^2 \Leftarrow \sqrt{x^2+2x} = xt$$

$$dx = -\frac{4t}{(t^2-1)^2}dt \; ; \; x = \frac{2}{t^2-1} \Leftarrow$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}} = \int \frac{1}{\left(\frac{2}{t^2-1}+1\right)\cdot\frac{2t}{t^2-1}} \cdot \frac{-4t}{(t^2-1)^2}dt = -2\int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$-2\arctan t + C = \boldsymbol{-2\arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}\right) + C}$$

(ב) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}$

פתרון: תחילה נציב $t = e^x$ $\Leftarrow$ $dt = e^x dx$ ונקבל

$$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1+t+t^2}}$$

כעת נציב

$$t(1-2y) = y^2-1 \Leftarrow 1+t+t^2 = t^2+2ty+y^2 \Leftarrow \sqrt{1+t+t^2} = t+y$$

$$dt = \frac{-2(y^2-y+1)}{(1-2y)^2}dy \; ; \; t = \frac{y^2-1}{1-2y} \Leftarrow$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1+t+t^2}} = \int \frac{1}{\frac{y^2-1}{1-2y}+y} \cdot \frac{-2(y^2-y+1)}{(1-2y)^2}dy =$$

$$\int \frac{1}{\frac{-(y^2-y+1)}{1-2y}} \cdot \frac{-2(y^2-y+1)}{(1-2y)^2}dy = \int \frac{2}{1-2y}dy = -\ln|1-2y| + C =$$

$$-\ln|1-2(\sqrt{1+t+t^2}-t)| + C = \boldsymbol{-\ln|1-2\sqrt{1+e^x+e^{2x}}+2e^x| + C}$$

(ג) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$ עבור $a>0$

פתרון: הדרך הקלה היא להציב

$$\sqrt{x^2+a^2} = -x+t \;\Leftarrow\; x^2+a^2 = x^2-2tx+t^2 \;\Leftarrow\; 2tx = t^2-a^2$$

$$\Leftarrow\; x = \frac{t^2-a^2}{2t} \;;\; dx = \frac{t^2+a^2}{2t^2}dt$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{1}{\frac{a^2-t^2}{2t}+t}\cdot\frac{t^2+a^2}{2t^2}dt = \int \frac{1}{\frac{a^2-t^2+2t^2}{2t}}\cdot\frac{t^2+a^2}{2t^2}dt =$$

$$= \int \frac{1}{a^2+t^2}\cdot\frac{a^2+t^2}{t}dt = \int\frac{dt}{t} = \ln|t|+C = \boldsymbol{\ln|\sqrt{x^2+a^2}+x|+C}$$

<u>דרך שנייה:</u> נציב $x=a\tan(t)$, $t\in(0,\frac{\pi}{2})$; $dx=\frac{a}{\cos^2 t}dt$. נקבל

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{a^2\tan^2 t+a^2}}\cdot\frac{a}{\cos^2 t}dt = \int \frac{1}{\sqrt{a^2(\tan^2 t+1)}}\cdot\frac{a}{\cos^2 t}dt =$$

נשים לב ש־ $\tan^2 t+1=\frac{1}{\cos^2 t}$ וכן $\sqrt{a^2}=a$ כי $a>0$, לכן

$$= \int \frac{1}{a\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}}\cdot\frac{a}{\cos^2 t}dt = \int \frac{dt}{\frac{1}{|\cos t|}\cdot\cos^2 t} =$$

בתחום $t\in(0,\frac{\pi}{2})$ מתקיים $\cos t>0$, לכן אין צורך בערך המוחלט –

$$= \int\frac{dt}{\cos t} = \int \frac{\cos t}{\cos^2 t}dt = \int\frac{\cos t}{1-\sin^2 t}dt =$$

נציב $y=\sin t$; $dy=\cos t dt$ ונקבל

$$= \int\frac{dy}{1-y^2} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1-y}\right)dy = \frac{1}{2}(\ln|1+y|-\ln|1-y|)+C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right|+C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right|+C = \boldsymbol{\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin\left(\arctan\left(\frac{x}{a}\right)\right)}{1-\sin\left(\arctan\left(\frac{x}{a}\right)\right)}\right|+C} =$$

בעזרת טריגונומטריה ניתן להראות כי $\sin(\arctan(\alpha)) = \frac{|\alpha|}{\sqrt{\alpha^2+1}}$, ובתחום $t\in(0,\frac{\pi}{2})$ מתקיים $x=a\tan t>0$, לכן אפשר לפשט:

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}}}{1-\frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}}}\right|+C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}}{1-\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}}\right|+C = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}-x}\right)+C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(\sqrt{x^2+a^2}+x)^2}{(\sqrt{x^2+a^2}-x)(\sqrt{x^2+a^2}+x)}\right)+C = \frac{1}{2}\ln\left[\left(\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{a}\right)^2\right]+C =$$

$$= \ln \frac{|\sqrt{x^2+a^2}+x|}{a} + C = \ln|\sqrt{x^2+a^2}+x| - \ln a + C = \mathbf{\ln|\sqrt{x^2+a^2}+x| + C}$$

כאשר במעבר האחרון הקבוע $-\ln a$ "נבלע" בקבוע האינטגרציה C. שימו לב שחישוב זה תקף עבור $x > 0$, אך קל לוודא ע"י גזירה שהפונקציה שמצאנו היא פונקציה קדומה לכל x. וקיבלנו את אותה תשובה כמקודם.

(ד) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3}$

פתרון: נשתמש בהצבה האוניברסלית:

$$t = \tan\frac{x}{2}\ ;\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\ ;\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}\ ;\ dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

$$\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3} = \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{4t}{1+t^2} + 3} \cdot \frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{2}{1-t^2+4t+3+3t^2}dt =$$

$$= \int \frac{2}{2t^2+4t+4}dt = \int \frac{dt}{t^2+2t+2} = \int \frac{dt}{(t+1)^2+1} = \arctan(t+1) + C =$$

$$= \mathbf{\arctan(\tan\frac{x}{2}+1) + C}$$

2. חשבו את אורך הקשת של העקומות הבאות:

(א) $y = \ln x$ מ־$x = \sqrt{3}$ ל־$x = 2\sqrt{2}$.

פתרון: $f(x) = \ln x$ ולכן $f'(x) = \frac{1}{x}$, ואורך הקשת הוא

$$\ell = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \sqrt{1+f'(x)^2}dx = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx =$$

נציב $t = \sqrt{x^2+1} \Leftarrow dt = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ ו־$x^2 = t^2-1$, ואם $x : \sqrt{3} \to 2\sqrt{2}$ אז $t : 2 \to 3$:

$$= \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{x^2+1}{x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_2^3 \frac{t^2}{t^2-1}dt = \int_2^3 \left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt =$$

$$1 + \frac{1}{2}\int_2^3 \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt = 1 + \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right]_2^3 = \mathbf{1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}}$$

(ב) $y = \sqrt{4-x^2}$ מ־$x = -1$ ל־$x = \sqrt{3}$.

פתרון: $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ ולכן $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$, ואורך הקשת הוא:

$$\ell = \int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{1+f'(x)^2}dx = \int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}}dx =$$

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{4}{4-x^2}}dx=2\int_{-1}^{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx=\int_{-1}^{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}dx=$$

נציב $t=\frac{x}{2}\Leftarrow dt=\frac{1}{2}dx$:

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{2}{\sqrt{1-t^2}}dt=[2\arcsin t]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}-\arcsin(-\frac{1}{2}))=2\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\boldsymbol{\pi}$$

3. חשבו את השטח החסום ע"י גרף הפונקציה $y=\cos(2x)$ בתחום $0\le x\le\frac{\pi}{4}$, וע"י שני המשיקים לגרף זה בנקודות החיתוך שלו עם הצירים.

פתרון: הגרף חותך את הצירים בתחום הנתון בנקודות $(0,1)$ ו־$(\frac{\pi}{4},0)$. שיפוע המשיק שווה לערך הנגזרת $y'=-2\sin(2x)$ בנקודת ההשקה $\Leftarrow$ משוואות המשיקים הן $y=1$ ו־$y=-2x+\frac{\pi}{2}$.

המשיקים נחתכים בנקודה $(\frac{\pi-2}{4},1)$. נמצא תחילה את השטח החסום ע"י גרף הפונקציה, המשיק $y=1$ והישר $x=\frac{\pi}{4}$:

$$S_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos(2x))dx=\left[x-\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

נשים לב שאם נחסיר מהשטח S_1 את שטח המשולש החסום בין המשיקים והישר $x=\frac{\pi}{4}$, נקבל בדיוק את השטח המבוקש, ולכן:

$$S=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi-2}{4})=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{\pi-3}{4}}$$

4. הוכיחו כי אורך העקום של גרף הפונקציה $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ מ־$x=a$ ל־$x=b$, שווה לשטח הכלוא בין העקום, ציר ה־x והישרים $x=a$ ו־$x=b$.

הוכחה: נסמן את אורך העקום ב־ℓ ואת השטח ב־S. $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\Leftarrow f'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, ואכן מתקיים:

$$\ell=\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}dx=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}dx=\int_a^b\sqrt{1+\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}}dx=$$

$$=\int_a^b\sqrt{\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}}dx=\int_a^b\sqrt{\frac{(e^x+e^{-x})^2}{4}}dx=\int_a^b\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx=\int_a^b f(x)dx=S$$

5. הפונקציה f רציפה בקטע $[0,4]$ ומקיימת $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = 2$.

(א) הוכיחו שקיימת $x_0 \in [0,4]$ שבה $f(x_0) = 0$.

הוכחה: f רציפה ב־$[1,2]$ ולכן ממשפט הערך הממוצע האינטגרלי קיימת נקודה $x_0 \in [1,2]$ שבה

$$f(x_0) = \frac{1}{2-1}\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx = 2 - 2 = 0$$

(ב) נתון גם כי $\int_0^4 f(x)dx = 12$, הוכיחו שקיימת $x_1 \in [0,4]$ שבה $f(x_1) = 4$.

הוכחה: f רציפה ב־$[2,4]$ ולכן ממשפט הערך הממוצע האינטגרלי קיימת נקודה $c \in [2,4]$ שבה

$$f(c) = \frac{1}{4-2}\int_2^4 f(x)dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^4 f(x)dx - \int_0^2 f(x)dx\right) = \frac{1}{2}\cdot(12-2) = 5 > 4$$

כמו כן, f רציפה בקטע $[x_0, c]$ ו־$f(x_0) = 0 < 4$. לכן ממשפט ערך הביניים קיימת נקודה $x_1 \in [x_0, c]$ שבה $f(x_1) = 4$, כדרוש.