

תרגיל 9 לתיכונים

שאלה 1

תהי

$$f(x, y, z) = (e^x \sin z, e^y \cos z, e^z xy)$$

הוכח כי f הפיכה מקומית ב $(0, 1, 0)$ ומצא את מטריצת יעקובי של f^{-1} בנקודה $(0, e, 0)$.

שאלה 2

נגדיר את הפונקציה

$$f(x, y) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

1. הוכח כי f דיפרנציאבילית בקטע הפתוח $(-1, 1)$ וכי $f'(0) \neq 0$.
2. הוכח כי f אינה חד חד ערכית בכל קטע פתוח המכיל את 0. הצעה לפתרון: הוכח ראשית כי עבור כל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$f\left(\frac{2}{(4k+1)\pi}\right) > f\left(\frac{2}{(4k+3)\pi}\right) < f\left(\frac{2}{(4k+4)\pi}\right)$$

3. איזה תנאי מתנאי משפט הפונקציה ההפוכה לא מתקיים כאן? (הרי מסקנת המשפט לא מתקיימת). בדוק בצורה מפורשת שהוא לא מתקיים.

שאלה 3

נתון מישור (למעשה זה נקרא היפר-מישור) ב \mathbb{R}^n על ידי המשוואה

$$C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_n x_n + D = 0$$

כאשר $C_1, \dots, C_n, D \in \mathbb{R}$ ו (C_1, \dots, C_n) היא מטריצה מדרגה 1 (כלומר לפחות אחד מה C_i הוא לא 0). נתונה נקודה $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. מצא (בעזרת שיטת כופלי לגרנז') את מרחק הנקודה מהמישור.

תזכורת: מרחק הנקודה a מקבוצה A הוא

$$\inf\{\|x - a\| \mid x \in A\}$$

שאלה 4

אנו רוצים לבנות תיבה בעל נפח גדול ככל הניתן אבל יש לנו כמות מוגבלת של חומר. מה צריכים להיות האורך, הרוחב והגובה של התיבה כדי שיהיה לה נפח מקסימלי, בהינתן ששטח הפנים שלה הוא S ? הוכח.

שאלה 5

מצא את המקסימום והמינימום הגלובאליים של

$$f(x, y, z) = xy + yz$$

תחת האילוצים

$$x^2 + y^2 = 1, \quad y^2 + z^2 = 4$$

שאלה 6

תזכורת: הגרף של פונקציה רציפה על קטע סגור הוא קבוצה בעלת מידה 0.
נתונה סדרת פונקציות רציפות $f_n(x)$ המתכנסת במידה שווה לפונקציה f על הקטע $[a, b]$. הוכח כי

$$A = \{(x, f_n(x)) \mid x \in [a, b], \quad n \in \mathbb{N}\}$$

היא קבוצה בעלת מידה 0 ב \mathbb{R}^2 .