הרצאה 3

רפ"ב

פולינומים, טורים

$R[x] \leftarrow R$

טענה: אם R תחום $R[x]^\times = R^\times$

טענה: אם R קומוטטיבי $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in R[x]$ הפיך אם"ם

($\Leftrightarrow$) a_0 הפיך ו- a_i לכל $n \geq i \geq 1$ נילפוטנטי.

~~דוגמה~~

למה: בחוג קומוטטיבי אם u הפיך ו- x נילפוטנטי אז $u+x$ הפיך.

$$\left(u\left(1-\frac{x}{u}\right)\right)^{-1} = u^{-1}\left(1+\left(-\frac{x}{u}\right)+\left(\frac{-x}{u}\right)^2+\dots+0\right)$$

הוכחה:

($\Leftarrow$) a_i נילפוטנטי ($i \neq 0$) ולכן כל a_ix^i נילפוטנטי (קומוטטיביות)
וסכום נילפוטנטים הוא נילפוטנטי ולכן קיבלנו

$$p(x) = \underbrace{a_0}_{\text{הפיך}} + \overbrace{(a_1x + \dots a_nx^n)}^{\text{נילפוטנטי}}$$

כאשר x נילפוטנטי. ונתון ש- a_0 הפיך ולפי הלמה $p(x)$ הפיך.

($\Rightarrow$) נניח $p(x)$ הפיך $\qquad p(x)\cdot q(x) = 1$

$p(x) = \sum^n a_ix^i$

$q(x) = \sum^m b_ix^i$

$a_0 b_0 = 1 \Leftarrow a_0$ הפיך,

$a_nb_m = 0$

$a_{n-1}b_m + a_nb_{m-1} = 0 \xrightarrow{\cdot a_n} a_n^2 b_{m-1} = 0 \qquad a_n^k \cdot b_{m-k+1} = 0.$

$a_{n-2}b_m + a_{n-1}b_{m-1} + a_nb_{m-2} = \xrightarrow{a_n^2} a_n^3 b_{m-2} = 0$

$\vdots$

$\dots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0 = 0 \xrightarrow{a_n^m} a_n^{m+1} \cdot b_0 = 0.$

$\Downarrow$

אך b_0 הפיך ולכן קיבלנו $a_n^{m+1} = 0 \Leftarrow a_n$

חוזרים על אותו התהליך על פולינום $\underbrace{p(x)}_{\text{הפיך}} - \underbrace{a_nx^n}_{\text{נילפוטנטי}}$ שהוא הפיך נילפוטנטי.
לפי הלמה.

דוג'

וכן הלאה, קיבלנו שכל המשתנים נילפוטנטים

$\square$

חוג חזקות פורמליים.

$$R[[X]] = \{\sum a_n x^n \mid a_i \in R\}$$

טענה: $1+X\cdot P(X)$ הוא איבר הפיך שמה.
$P(X) \in R[[X]]$

$$\frac{1}{1-X\cdot p(X)} = \sum_{n=0}^{\infty} (XP(X))^n \in R[[X]]$$

טענה: איבר $f(x) \in R[[X]]$ הפיך $\Leftrightarrow$ המקדם החופשי הוא הפיך.

כי:

$$f(x) = a_0 + a_1 X + \dots = a_0(1 + a_0^{-1}a_1 X + a_0^{-1}a_2 X^2 + \dots)$$

$$= \underbrace{a_0}_{\text{הפיך לפי הנתון}}\underbrace{(1 + X\underbrace{(a_0^{-1}a_1 + a_0^{-1}a_2 X + \dots)}_{p(x)})}_{\text{הפיך}}$$

[p הוא טור אינסופי. דרשנו ה-X אך לא הפיכות מקדמים ישיר]

חוג טורי לורן

משל.

$$R((X)) = \left\{\sum_{i=-n}^{\infty} a_i x^i \;\middle|\; \begin{matrix} a_i \in R \\ n \in \mathbb{Z} \end{matrix}\right\}$$

$$R \subsetneq R[x] \subsetneq R[[X]] \subsetneq R((X))$$

לעומת ש $R((X))$ $(R[[X]])$ אך קיים / מעלה מוגדרת,
אין דרגה כזה מוגדרת -

הערכה: $v : R((X)) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$

$$v\left(\sum_{i=-n}^{\infty} a_i x^i\right) = \min\{i \mid a_i \neq 0\}$$

$$v(0) = \infty$$

Scanned by CamScanner

למה: $v(f+g) \geq \min\{v(f), v(g)\}$

$v(f \cdot g) \geq v(f) + v(g)$ זה תחום ועוד להוכיח שלמות קרוב

אם R תחום אז זה שיוויון

מסקנה: אם R תחום אז גם $R((x))$ הוא תחום.

מסקנה: אם F שדה $F((x))$ (טורי לורן מעל השדה) הוא גם שדה.
(הוכחה)

$$f(x)=\sum_{i=-n}^{\infty} a_i x^i = x^{-n}\underbrace{(a_{-n}+a_{-n+1}x+\dots)}_{g(x)\in F[[x]]}$$

$$-n = v(f(x))$$

המקדם החופשי של $g(x)$ הוא $0 \neq a_n \in F$ (זה הקטנה אין להתחיל 0)
ולכן הפיך.

ו-x^{-n} בוודאי הפיך ולכן $f(x)$ הפיך.

$\blacksquare$

את כל החוגים שהגדרנו אפשר לעשות שוב ושוב...

$(R[[x]]((y)))[z]$ - פולינום ב-z שהמקדמים שלו

הם טורי לורן ב-y שהמקדמים שלהם הם חזקות פורמליות ב-x.

הערה: הוכחה: $R[x_1,x_2,\dots,x_n]=R[x_1][x_2]\dots[x_n]$

תרגיל: $R[x][y]=R[y][x]$

$$\sum_{k=0} p_k(x) y^k = \sum_{k=0}^{n} q_k(y) x^k$$

תרגיל: מחוג החזקות הכללי עם קשר?

פולינום ב-y שהמקדמים שלו טורים ב-x

$$F[[x]][y] \subsetneq F[y][[x]] \subsetneq F[[x]][[y]]$$

$$\left\{\sum\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_{ki} x^i\right) y^k\right\}$$

דף 2

דוגמה להבדל ממשי:

[illegible] [illegible]

$$F[[x]](y) \subsetneq F(y)[[x]]$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=?}^{k} y^i\right)x^k$$

הערה: $F((x))((y)) \neq F((x,y))$

למשל: $\cancel{\sum_{n=1}^{\infty} y^n x^n}$ $\sum_{n=1}^{\infty}(x^{-n})y^n \notin F((x,y))$

להסתכל דרך החזקות של המשתנים יחד.

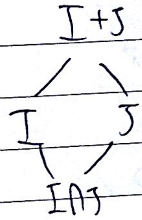
אידיאלים

$I \trianglelefteq R$ אם $RIR \subseteq I$

אידיאל ראשי - $\langle x\rangle = \left\{\sum_{\text{סופי}} r_i x r_i'\right\}$

I/+

בחוג קומוטטיבי - $\langle x\rangle = Rx = xR$



$$IJ = \left\{\sum_{\text{סופי}} a_i b_i \;\middle|\; \begin{matrix} a_i \in I \\ b_i \in J\end{matrix}\right\}$$

הערה: אי אפשר להגדיר - $IJ = \left\{ab \;\middle|\; \begin{matrix} a\in I \\ b\in J\end{matrix}\right\}$ כי לא סגור לחיבור.

~~$\langle x\rangle, \langle y\rangle \dots F(x,y)$~~

~~$\langle x\rangle * \langle y\rangle = \{x\cdot f(x), y\, g(x,y)\}$~~

תרגיל: תוכיחו כי האידיאל $I = \langle 2, x\rangle \trianglelefteq \mathbb{Z}[x]$ אינו ראשי

$$\Downarrow$$

$$\langle 2\rangle + \langle x\rangle$$

הוכחה: איבר כל האידאל - $H(x) = 2\cdot f(x) + x\cdot g(x)$

כאשר $f,g \in \mathbb{Z}[x]$ קל לראות ש $1 \notin I$. מאחר ולנו להזכיר

כי $\mathbb{Z}[x]$ הוא קומוטטיבי.

דוג:

(למשל כי $2\mathbb{Z} \ni h(0)$) ולכן $I \subsetneq \mathbb{Z}[x]$ (אידיאל אמיתי - מוכל ממש).

(שימו לב - ש- $\mathbb{Z}[x]$ הוא ראשי: $\mathbb{Z}[x] = \langle 1\rangle$)

נראה שהוא לא ראשי:

נניח בשלילה שקיים $q(x)$ כך ש-

$$I = \langle 2, x\rangle = \langle q(x)\rangle$$

לכן - $2, x \in \langle q\rangle$ ולכן

$$2 = q(x)\cdot a(x)$$
$$x = q(x)\cdot b(x)$$

כאשר $a(x), b(x) \in \mathbb{Z}[x]$

אבל אין פולינום שמחלק גם את 2 וגם את x. חוץ מ- $q=1$

אבל אם $q=1$ אז $I = \langle q\rangle = \mathbb{Z}[x]$ סתירה לכך שראינו קודם שזה אידיאל אמיתי.

חוג מנה

$I \triangleleft R$ אז- $R/I = \{r+I \mid r\in R\}$ חוג מנה.

$$(r_1+I) + (r_2+I) = r_1+r_2+I$$
$$(r_1+I)(r_2+I) = r_1\cdot r_2 + I$$
$$0_{R/I} = 0+I = I$$
$$1_{R/I} = 1+I$$

משפטים

(1) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$ רחוקים!

(2) $3\mathbb{Z}/18\mathbb{Z} = \{0+18\mathbb{Z}, 3+18\mathbb{Z}, 6+18\mathbb{Z}, 9+18\mathbb{Z}, 12+18\mathbb{Z}, 15+18\mathbb{Z}\}$

כמו חבורה חיבורית - $3\mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_6$

כפל חוגים -

נבנה טבלת כפל-

	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\bar{12}$	$\bar{15}$
$\bar{0}$	0	0	0	0	0	0
$\bar{3}$	0	9	0	9	0	9
$\bar{6}$	0	0	0	0	0	0
$\bar{9}$	0	9	0	9	0	9
$\bar{12}$	0	0	0	0	0	0
$\bar{15}$	0	9	0	9	0	9

רמז

הוכח ש- $\mathbb{Z}_6 \ncong 3\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ כאשר חוגים.

(3) $I = \langle x^2+1\rangle \triangleleft \mathbb{R}[x]$

תאר את החוג $\mathbb{R}[x]/\langle x^2+1\rangle$

$\boxed{\text{סימון: } \quad p(x)+I = \overline{p(x)}}$

$\bar{1}$

$\bar{x}$ -

$\bar{x}^2 = x^2 + \langle x^2+1\rangle = x^2 - (x^2+1) + \langle x^2+1\rangle = -1 + I = \overline{-1}$

$\bar{x}^3 = \bar{x}^2 \cdot \bar{x} = -\bar{x}$

$\bar{x}^4 = \bar{1}$

$\mathbb{R}[x]/\langle x^2+1\rangle = \{p(x)+I \mid p(x)\in\mathbb{R}[x]\}$ — לפי חלוקה עם שארית

$= \{\overline{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n} \mid ?\} = \{a_0\cdot\bar{1} + a_1\bar{x}^2 + \dots + a_n\bar{x}^n \mid ?\}$

$= \{b_0\cdot\bar{1} + b_1\bar{x} \mid b_0, b_1 \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{C}$

$\bar{x}^2 = -\bar{1}$ $\quad \bar{x} \to i$

$\bar{1} \to 1$

(4) $\langle x^2-3\rangle \triangleleft \mathbb{Q}[x]$

$\bar{1} =$

$\bar{x} =$

$\bar{x}^2 = x^2 + \langle x^2-3\rangle = x^2 - (x^2-3) + \langle x^2-3\rangle = 3 + \langle x^2-3\rangle = \bar{3}$

$\bar{x}^3 = \bar{x}^2\cdot\bar{x} = 3\bar{x}$

$\vdots$

$\mathbb{Q}/\langle x^2-3\rangle = \{p(x)+\langle x^2-3\rangle \mid p\in\mathbb{Q}[x]\} = \{\bar{a_0} + a_1\bar{x} + \dots a_n\bar{x}^n \mid ?\}$

$= \{\bar{b_0} + b_1\bar{x} \mid b_0, b_1 \in \mathbb{Q},\ \bar{x}^2 = \bar{3}\} \cong \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$.

תרגיל: הוכיחו כי $R_1 = \mathbb{C}[x,y]/\langle xy-1\rangle \ncong R_2 = \mathbb{C}[x,y]/\langle y-x^2\rangle$

פתרון: נפרש את שני החוגים **מצד אחד:** $R_2 \xrightarrow[x\mapsto t,\ y\mapsto t^2]{\cong} \mathbb{C}[t]$

מצד שני: $R_1 \xrightarrow[x\mapsto t,\ y\mapsto t^{-1}]{\cong} \mathbb{C}[t,t^{-1}]$

עכשיו נשאר להוכיח ש- $\mathbb{C}[t] \cong \mathbb{C}[t,t^{-1}]$

נסתכל על **האיברים ההפיכים** ב- $\mathbb{C}-\{0\} = \mathbb{C}^\times = \mathbb{C}[t]$

נשים לב- $\mathbb{C}[x]^\times \cup \{0\}$ מקיים קבוצה סגורה לחיבור.

(למעשה זה מימוש הקודם).

אולם איך נסתכל על- $\mathbb{C}[t,t^{-1}]^\times \cup \{0\}$ הוא לא סגור לחיבור.

למשל: $t+1$ הוא לא הפיך. ← למה הפיך?