

# 3) מרחב נורמלי / מרחב

1. מצא את כל המרחבים  $x$  ממדים  $V$  הבאים

$$x(t) = 2t^3 - 15t^2 + 36t$$

$$V = C[1, 4] \quad (1)$$

$$x(t) = 2t - 1$$

$$V = L_1[0, 1] \quad (2)$$

$$x = (1 + 2i, 2 + 3i)$$

$$V = \mathbb{C}^2 \quad (3)$$

$$x = \left( \frac{5^n - 3^n}{7^n} \right)_{n=1}^{\infty}$$

$$V = \ell^2 \quad (4)$$

$$x(t) = \sin^2 t$$

$$V = C[0, \pi] \quad (5)$$

$$x(t) = e^t + 2 \sin t$$

$$V = L^2[0, 1] \quad (6)$$

2. מצא את המרחב בין נקודות  $x, y$  במרחב  $V$

$$x = (2 + 3i, 3 + 2i), y = (3i - 1, 3i - 1)$$

$$V = \mathbb{C}^2 \quad (1)$$

$$x(t) = 16t^3 + 48t, y(t) = 60t^2 + 11$$

$$V = C[0, 1] \quad (2)$$

$$x = \left( \frac{n^2}{2^n} \right)_{n=1}^{\infty}, y = \left( \frac{n}{2^n} \right)_{n=1}^{\infty}$$

$$V = \ell^1 \quad (3)$$

$$|x - y|_1 = 4$$

3. איזה מבין הפונקציות הבאות מוגדרות במרחב  $\mathbb{R}^3$

$$M(\xi, \eta, \zeta)$$

$$p(M_1, M_2) = (\xi_1 - \xi_2)^3 + (\eta_1 - \eta_2)^3 + (\zeta_1 - \zeta_2)^3 \quad (1)$$

$$p(M_1, M_2) = [(\xi_1 - 2\xi_2)^3 + (\eta_1 - 3\eta_2)^2 + (\zeta_1 - 4\zeta_2)^2]^{1/2} \quad (2)$$

$$p(M_1, M_2) = [|\xi_1 - \xi_2|^{1/2} + |\eta_1 - \eta_2|^{1/2} + |\zeta_1 - \zeta_2|^{1/2}]^2 \quad (3)$$

$$p(M_1, M_2) = |\xi_1 - \xi_2| \quad (4)$$

4

מרחב הילברט

מכניקה קלאסית

1. האם כל קוורטרנרן הוא וקטור במרחב הילברט (מרחב, מרחב)

(1)  $x \perp y \iff \langle x, y \rangle = 0$

(2)  $\|x+y\| = \|x-y\| \iff \langle x, y \rangle = 0$

$\|x+iy\| = \|x-iy\|$

למשל

א' מרחב

מרחב הילברט נקרא  $L^2$  מכיוון ש...

סיומון במרחב  $L^2$  וקטור בסדר שני

משפט ריז-זיסמן (מכניקה קלאסית)

$\sum_k |b_k|^2 < \infty \implies \exists f \in H \text{ such that } \langle f, u_k \rangle = b_k$

א' מרחב הילברט  
ב' מרחב הילברט  
ג' מרחב הילברט  
ד' מרחב הילברט

4. האם אפשר להגדיר נורמה על  $\mathbb{R}^2$  כך ש- $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$  לכל  $x, y \in \mathbb{R}^2$ ?  
 (א)  $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$   
 (ב)  $\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \iff \langle x, y \rangle = \|x\|\|y\|$   
 (ג)  $\langle x, y \rangle = \|x\|\|y\| \iff x$  ו- $y$  קולינאריים  
 (ד)  $\langle x, y \rangle = \|x\|\|y\|$  לכל  $x, y \in \mathbb{R}^2$  רק כאשר  $x$  ו- $y$  קולינאריים לכל זוג, דבר שאינו נכון.

5. האם אפשר להגדיר נורמה על  $\mathbb{R}^2$  כך ש- $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$  לכל  $x, y \in \mathbb{R}^2$  ו- $\|x\| = |x_1| + |x_2|$ ?  
 (א)  $\|x+y\| = |x_1+y_1| + |x_2+y_2|$   
 (ב)  $\|x\| = |x_1| + |x_2|$   
 (ג)  $\|x\| = |x_1| + |x_2|$  היא נורמה (למשל, היא מקיימת את כל תכונות הנורמה).

6. האם אפשר להגדיר נורמה על  $\mathbb{R}^2$  כך ש- $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$  לכל  $x, y \in \mathbb{R}^2$  ו- $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ?  
 (א)  $\|x+y\| = \sqrt{(x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2}$   
 (ב)  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$   
 (ג)  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  היא נורמה (למשל, היא מקיימת את כל תכונות הנורמה).

7. האם אפשר להגדיר נורמה על  $\mathbb{R}^2$  כך ש- $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$  לכל  $x, y \in \mathbb{R}^2$  ו- $\|x\| = |x_1| + |x_2|$  ו- $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ?  
 (א)  $\|x+y\| = |x_1+y_1| + |x_2+y_2|$   
 (ב)  $\|x\| = |x_1| + |x_2|$   
 (ג)  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$   
 (ד)  $\|x\| = |x_1| + |x_2|$  ו- $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  אינן יכולות להיות נורמות באותו זמן.

8. האם אפשר להגדיר נורמה על  $\mathbb{R}^2$  כך ש- $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$  לכל  $x, y \in \mathbb{R}^2$  ו- $\|x\| = |x_1| + |x_2|$  ו- $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  ו- $\|x\| = |x_1| + |x_2|$ ?  
 (א)  $\|x+y\| = |x_1+y_1| + |x_2+y_2|$   
 (ב)  $\|x\| = |x_1| + |x_2|$   
 (ג)  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$   
 (ד)  $\|x\| = |x_1| + |x_2|$  ו- $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  אינן יכולות להיות נורמות באותו זמן.

9. האם אפשר להגדיר נורמה על  $\mathbb{R}^2$  כך ש- $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$  לכל  $x, y \in \mathbb{R}^2$  ו- $\|x\| = |x_1| + |x_2|$  ו- $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  ו- $\|x\| = |x_1| + |x_2|$  ו- $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ?  
 (א)  $\|x+y\| = |x_1+y_1| + |x_2+y_2|$   
 (ב)  $\|x\| = |x_1| + |x_2|$   
 (ג)  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$   
 (ד)  $\|x\| = |x_1| + |x_2|$  ו- $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  אינן יכולות להיות נורמות באותו זמן.

10. האם אפשר להגדיר נורמה על  $\mathbb{R}^2$  כך ש- $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$  לכל  $x, y \in \mathbb{R}^2$  ו- $\|x\| = |x_1| + |x_2|$  ו- $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  ו- $\|x\| = |x_1| + |x_2|$  ו- $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  ו- $\|x\| = |x_1| + |x_2|$  ו- $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ?  
 (א)  $\|x+y\| = |x_1+y_1| + |x_2+y_2|$   
 (ב)  $\|x\| = |x_1| + |x_2|$   
 (ג)  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$   
 (ד)  $\|x\| = |x_1| + |x_2|$  ו- $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  אינן יכולות להיות נורמות באותו זמן.