תרגיל בית 4 במבנים אלגבריים
89-214 סמסטר א' תשע"ז

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום בכל דף שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. תאריך הגשת התרגיל הוא בתרגול בשבוע המתחיל בתאריך י"ח כסלו ה'תשע"ז, 18.12.2016.

שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות שאינן להגשה, והן בדרך כלל קלות יותר. אבל כדאי מאוד לוודא שיודעים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

שאלה 1. כמה תת־חבורות יש לחבורה $\mathbb{Z}_{30}$? בכמה מהן יש איבר מסדר 2?

שאלה 2. מצאו איבר מסדר 6 בחבורה S_5. רמז: מצאו איבר מסדר 2 ב-S_2 ואיבר מסדר 3 ב-S_3.

שאלה 3. תהי G חבורה. יהיו $a, b \in G$ איברים שמתחלפים (כלומר $ab = ba$). הוכיחו כי $\langle a, b\rangle$ חבורה אבלית.

שאלה 4. מצאו את הסימן של התמורה

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 2n & 1 \end{pmatrix}$$

שאלות להגשה

שאלה 5. חשבו את האינדקסים של תת־החבורות הבאות:

א. $[\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \langle (1,1) \rangle]$. רמז: מצאו קבוצה אינסופית של מחלקות שונות.

ב. $[2\mathbb{Z} \times S_3 : 6\mathbb{Z} \times \langle \mathrm{id} \rangle]$.

שאלה 6. חשבו בעזרת משפט אוילר:

א. שתי הספרות האחרונות של 543^{3838}.

ב. $89^{214} \pmod{91}$.

הערה. ניתן להעזר בנוסחה הבאה לחישוב פונקציית אוילר של מספר שלם n:

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

כאשר $p_1, \dots, p_k$ המספרים הראשוניים המחלקים את n.

שאלה 7. תהי G חבורה. יהיו $a,b\in G$ איברים מסדר אי זוגי, כך ש-$\langle a\rangle\cap\langle b\rangle=\{e\}$ וגם $ab=ba$.

הוכיחו כי $o(a^2b^2)=[o(a),o(b)]$. כלומר שהסדר של a^2b^2 שווה לכפולה המשותפת המזערית של הסדרים $o(a)$ ו-$o(b)$.

שאלה 8. תהי G חבורה, ויהיו $H,K\leq G$ תת־חבורות.

א. הוכיחו שאם H ו-K סופיות כך ש-$(|H|,|K|)=1$, אז $H\cap K=\{e\}$.

ב. נקרא לתת־חבורה של G נאותה אם היא מוכלת ממש ב-G. הוכיחו ש-G אינה איחוד של שתי תת־חבורות נאותות. כלומר שאם $G=H\cup K$, אז $G=H$ או $G=K$.

ג. תנו דוגמה לחבורה שהיא איחוד של שלוש תת־חבורות נאותות שלה. רמז: אפשר לבחור חבורה מסדר 4.

שאלה 9. יהי p ראשוני, ותהי G חבורה מסדר p^2.

א. הוכיחו שניתן ליצור את G עם תת־קבוצה בת שני איברים. רמז: משפט לגראנז' כמה פעמים.

ב. בחרו p. תנו דוגמה מפורשת ל-G לא ציקלית מסדר p^2, ולשני איברים $a,b\in G$ כך ש-$G=\langle a,b\rangle$.

שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה צרפו את הפתרון שלהן.

שאלה 10. נקרא למטריצה M מטריצת תמורה אם היא מטריצה שכל האיברים בה הם אפסים ואחדות, ושבכל שורה ובכל עמודה יש בדיוק פעם אחת 1. למשל

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

היא מטריצת תמורה בגודל 4×4. הוכיחו שאוסף מטריצות התמורה בגודל $n\times n$ הוא חבורה עם הפעולה של כפל מטריצות. התאימו לכל איבר $\sigma\in S_n$ מטריצת תמורה M_σ באופן טוב (כלומר התאמה חח"ע ועל ששומרת על הפעולה), והוכיחו שהסימן של σ הוא הדטרמיננטה של M_σ.

שאלה 11. תהינה $\sigma,\tau\in S_n$ תמורות כך שמתקיים $\sigma=\tau^2$. במקרה זה נאמר כי τ היא שורש של σ. מצאו תנאי מספיק והכרחי שקובע האם לתמורה נתונה $\sigma\in S_n$ יש שורש. אם קיים שורש, איך אפשר לחשב אותו מפורשות?

בהצלחה!