

פיסיקה למתמטיקאים 88-320

מבחן מועד ב' סמסטר ב' תשע"ד

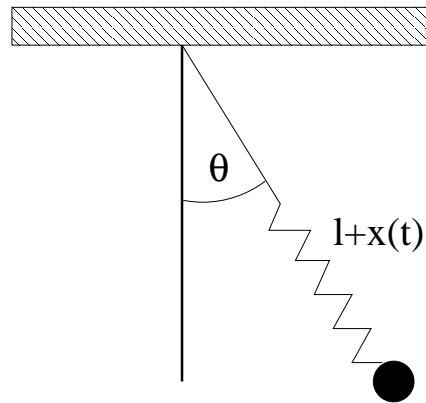
משך המבחן: שלוש שעות. כל חומר עזר מותר בשימוש (כולל מחשבון).
 ענו על 3 מ-4 השאלות הבאות. ניתן גם (לא חובה) לענות על שאלת הבונוס (שאלה 5).
 סמנו בבירור על איזו שאלה אתם עונים והקיפו תשובות סופיות.

1. נתבונן במטוטלת המורכבת ממסה m התלויה בקצהו של קפיץ בעל קבוע k .
 אורך שווי המשקל של הקפיץ ℓ ותנועתו בכיוון הרדאילי בלבד. נסמן את אורך
 הקפיץ בזמן t ב $\ell + x(t)$ ואת הזווית עם הכיוון האנכי ב $\theta(t)$ כמתואר בתרשים.

(א) רשמו את הלגראנג'יאן של המטוטלת.

(ב) כתבו את משוואות אוילר לגראנג' עבור $x(t)$ ו $\theta(t)$.

(ג) מצאו את $x(t)$ בקרוב תנודות קטנות ($\mathcal{O}(\theta^2)$) עם תנאי ההתחלה $x(0) = A$, $\dot{x}(0) = 0$.



2. גוף נע במרחב התלת מימדי תחת השפעת כח הכבידה $\vec{F} = -mg\hat{z}$ בנוסף קיים
 כח נוסף המתואר ע"י הפוטנציאל $V_1 = -z^3 + 3$.

(א) כתבו את הלגרנז'יאן.

- (ב) מהן הקואורדינטות הציקליות ומהם הגדלים הנשמרים.
 (ג) כתבו את משוואות התנועה עבור קואורדינטת ה-z.
 (ד) מהן נקודות שיווי המשקל בקואורדינטת ה-z? קבעו האם הן יציבות.
 (ה) עבור נקודות שיווי המשקל היציבות, מהי תדירות התנודות הקטנות?

3. נתונה חבילת גלים באוסילטור הרמוני חד מימדי. $|\psi(0)\rangle$ מתאר חלקיק הנע בפוֹטנציאל הרמוני עם תדירות ω ב $t = 0$. נבטא מצב זה בעזרת המצבים העצמיים של ההמילטוניאן $|\psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$.

- (א) רשמו ביטוי למקדמים c_n (בהצגת bra, ket)
 (ב) בהינתן ש $|\psi(0)\rangle$ מנורמל, מהו התנאי שמקיימים המקדמים c_n ?
 (ג) רשמו את $|\psi(t)\rangle$ עבור $t > 0$
 (ד) מצאו את התוחלת של האנרגיה $\langle H \rangle_t = \langle \psi(t) | H | \psi(t) \rangle$. האם ערך זה תלוי בזמן?
 (ה) הראו כי התוחלת של המקום $\langle x \rangle_t$ מקיימת

$$\langle x \rangle_t = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} |c_n c_{n+1}| \cos(\phi_{n+1} - \phi_n - \omega t).$$

(הדרכה: רשמו $c_n = |c_n| e^{i\phi_n}$ והשתמשו באופרטורי יצירה והשמדה a, a^\dagger על מנת לחשב את אלמנטי המטריצה $\langle m | x | n \rangle$)

(ו) הראו מפורשות כי התוחלת של המקום $\langle x \rangle_t$ מקיימת את משוואת התנועה הקלאסית $\frac{d^2 \langle x \rangle}{dt^2} + \omega^2 \langle x \rangle = 0$

4. על חלקיק בוצעה מדידה ונמצא כי התנע הזויתי בריבוע (L^2) הוא 42 והתנע הזויתי בכיוון z הוא (L_z) הוא 4.

- (א) אם נמדוד עתה את התנע הזויתי של החלקיק בכיוון x (L_x) אילו ערכים נוכל לקבל?
 (ב) כנ"ל לגבי התנע הזויתי בכיוון y (L_y).
 (ג) אם נמדד עתה התנע הזויתי בכיוון x ונמצא כי הוא 3, מהם הערכים האפשריים במדידה חוזרת של L^2 , ומהן ההסתברויות המתאימות?

5. (שאלת בונוס) ספינת החלל אנטרפרייז, הנעה במהירות של $\beta = 0.6$ (יחסית למהירות האור) רודפת אחרי ספינה קלינגונית הנעה במהירות $\beta = 0.9$ ממהירות האור. האנטרפרייז משגרת טורפדו לכיוון הספינה הקלינגונית במהירות של $\beta = 0.8$ יחסית לאנטרפרייז. מהי מהירותו יחסית לספינה הקלינגונית.

בהצלחה!