פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

מבוא

המפגש עם הפונקציות המעריכיות והפונקציות הלוגריתמיות יכול להיות חוויה לימודית מרתקת מסיבות אחדות:
הוראת הפרק מבוססת על יסודות שהונחו לאורך כל שנות הלימודים באלגברה ובאנליזה, ולכן היא מאפשרת לחזור אל מושגים קודמים ולהתעמק בהם תוך שימוש בפונקציות חדשות כדוגמה.
הפרק מזמן היכרות עם פונקציה מתמטית חדשה, הפונקציה הלוגריתמית המוגדרת כפונקציה הפוכה לפונקציה מוכרת, ומהגדרה זו נגזרות כל תכונותיה[1]. ההזדמנות להציג את שתי הפונקציות האלה, המעריכית והלוגריתמית, זו לצד זו מאפשרת להעמיק את ההיכרות עם הקשר בין תכונות של פונקציה לתכונות הפונקציה ההפוכה לה.
פשטות הנגזרות של הפונקציה המעריכית והפונקציה הלוגריתמית מאפשרת לבצע חקירות מעניינות של פונקציות המשלבות פונקציות אלה ופונקציות נוספות, ולהתבונן בהשפעה של מרכיבי פונקציה על תכונותיה.
הפונקציות המעריכיות מתאימות לתיאור תופעות רבות בטבע ובכלכלה, מה שמאפשר להצמיח את הנושא מתוך סיטואציות מוכרות.

הפונקציה המעריכית

הגדרה

פונקציה ממשית אשר מתאימה לכל מספר x ממשי את ערך החזקה $y=a^x$ עם בסיס a נתון, המקיים את התנאים: $0<a\neq 1$, נקראת **פונקציה מעריכית**.

הגדרה זו אינה שלמה כל עוד לא הוגדרה פעולת חזקה עם מעריך ממשי כלשהו. לאחר שנעסוק בהגדרה זו בהרחבה ובעומק האפשריים, נחזור להגדרת הפונקציה המעריכית ולמגבלות על הפרמטר a.
נפתח בדוגמאות המאפשרות להצמיח את הפונקציות המעריכיות, לחוש את תכונותיהן, ולפתח אינטואיציה לשיקולים הקשורים בהרחבת פעולת החזקה ממעריכים טבעיים למעריכים ממשיים.

פעילות 1: קיפולי נייר

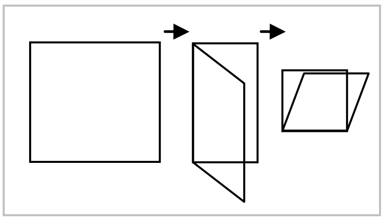
אחת הדרכים להמחיש את המהירות של גידול מעריכי היא באמצעות קיפולי נייר.
הקוראים מוזמנים להצטייד בדף A4 ועוד דפים מסוגים שונים, ולבצע את הפעולות המתוארות, תוך כדי קריאה.

ניקח דף מדפסת רגיל ונקפל אותו לשניים לרוחבו.
נקפל שוב לשניים.

- כמה פעמים נוכל לחזור על פעולת הקיפול?

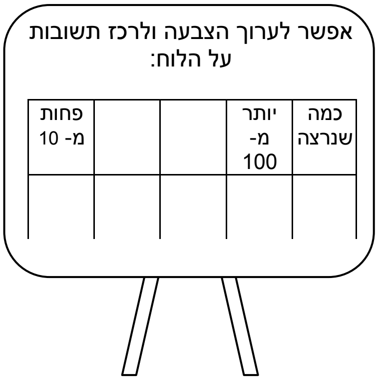
ניתן לתלמידים להמשיך בפעולת הקיפול.

- האם מספר הקיפולים שנצליח לבצע ישתנה, אם נקפל: גיליון עיתון? פתק תזכורות? בול דואר? ניר כריכים דק? מפית שולחן? מודעת פרסומת ענקית?

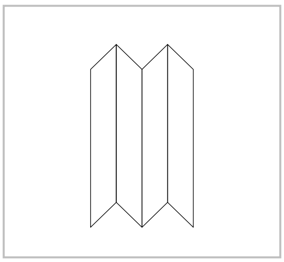


איור 1

[1] ניתן להגדיר את הפונקציה הלוגריתמית גם בדרך אחרת שאינה מבוססת על הפונקציה המעריכית, ולהוכיח שהפונקציה שהוגדרה היא פונקציה הפוכה לפונקציה המעריכית (ר' עמוד 620).



איור 2



איור 3

כדאי לחלק לתלמידים בכיתה דפים בגדלים ועוביים שונים. הם יקפלו גם אם לא נבקש...

- מדוע לא הצלחנו לבצע יותר מאשר שבעה קיפולים, ואולי עוד אחד או שניים במאמץ רב?

- ואיך זה קשור לנושא השיעור?

הסבר

כשמקפלים גיליון נייר פעם אחת נוצרות ממנו שתי שכבות.

כל קיפול מכפיל את מספר השכבות.

שני קיפולים – ארבע שכבות. n קיפולים - 2^n שכבות.

כשנגיע **לשבעה קיפולים בלבד** יהיו בדף המקופל **128 שכבות**. במצב זה כבר קשה מאוד לקפל את הדף, גם כשמתחילים מגיליון גדול מאוד ודק מאוד.

כדאי לתת לתלמידים למצוא את תבנית הפונקציה המתאימה למספר הקיפולים את מספר השכבות, כל עוד הקיפול אפשרי. לא בכל כיתה ההבחנה, שהפונקציה היא $y = 2^n$, מידית.

לפעמים תלמידים מעלים הצעה מתחכמת:
נוכל לקפל את הדף מספר קיפולים גדול כרצוננו (בתנאי שהדף מספיק גדול) אם נקפל את הדף "בצורת אקורדיון".
זו הזדמנות להשוות בין שני סוגי הקיפולים. בקיפול "בצורת אקורדיון" נוספת בכל קיפול שכבה אחת ולכן העובי גדל באופן לינארי.

פעילות 2: גידול מעריכי

נחשוב על אוכלוסייה של חיידקים במעבדה. חיידקים מתרבים באופן שכל חיידק מתחלק לשניים וכל חלק הופך לחיידק בפני עצמו. תהליך זה נקרא הכפלה והוא חוזר על עצמו בפרקי זמן קבועים.

נניח שברגע מסוים יש במעבדה חיידק אחד ואוכלוסיית החיידקים מכפילה את עצמה בכל שעה. נעקוב אחרי אוכלוסיית החיידקים אחרי x שעות:

בסוף שעה x	0	1	2	3	4	5	6	7	...	24	x
מספר חיידקים	1	2	4	8	16	32	64	128	...	16,777,216	
תבנית	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7		2^{24}	2^x

טבלה 1

הערה: הניסוי המתואר כאן הוא מודל מתמטי, בו החיידקים נמצאים בתנאים אידיאליים מבחינת המזון, המקום, הטמפרטורה ועוד, כך שההתרבות תלויה רק בזמן. במציאות אוכלוסיית החיידקים לא יכולה להתרבות עד אינסוף, אלא עד גמר המשאבים של מזון ומקום.

$f(x)=2^x$ היא פונקציה המתארת את מספר החיידקים בחלוף x שעות. בתחילת הניסוי, מספר החיידקים היה $f(0)=1$. אם מספר החיידקים ההתחלתי הוא מספר קבוע כלשהו: $f(0)=k$, אז הפונקציה תהיה: $f(x)=k\cdot 2^x$ או $f(x)=f(0)\cdot 2^x$.

במקרה זה נוכל לשאול שאלות על הגודל של אוכלוסיית החיידקים "לפני תחילת הניסוי".

- מה הייתה כמות החיידקים במעבדה שעה, שעתיים, או x שעות, לפני תחילת הניסוי?

שעה אחת לפני תחילת הניסוי הייתה במעבדה מחצית מכמות החיידקים ההתחלתית. שעתיים לפני תחילת הניסוי – רבע מכמות החיידקים, וכך הלאה.

נוכל לרשום: $f(-1)=f(0)\cdot 2^{-1}=f(0)\cdot\frac{1}{2}$, $f(-2)=f(0)\cdot 2^{-2}=f(0)\cdot\frac{1}{4}$ וכו'.

באופן דומה ניתן לשאול על כמות החיידקים בפרקי זמן לא שלמים כמו חצי שעה, שלושת רבעי שעה ועוד: $f(0.5)=f(0)\cdot 2^{0.5}$, $f(0.75)=f(0)\cdot 2^{0.75}$ וכו'.

נוכל לשאול שאלות לא רק על כמות החיידקים במעבדה אלא גם **פי כמה** גדלה האוכלוסייה בפרק זמן נתון. למשל:

- פי כמה גדלה אוכלוסיית החיידקים במהלך חצי שעה?

תשובה אינטואיטיבית **לא נכונה** היא "פי 1.5". מדוע זה לא ייתכן?

אילו אוכלוסיית החיידקים הייתה גדלה פי 1.5 בחצי שעה, היא הייתה גדלה פי 1.5 גם במחצית השנייה של השעה. לכן במהלך שעה שלמה האוכלוסייה הייתה גדלה פי: $1.5\cdot 1.5=2.25$, בניגוד לנתון שהיא גדלה פי 2 בכל שעה.

כעת נחזור לשאלה. נסמן ב- a את השיעור בו גדלה אוכלוסיית החיידקים בחצי שעה.

במשך שעה תגדל האוכלוסייה פי $a\cdot a=a^2$.

מנתוני השאלה נובע כי: $a^2=2$, ו- a הוא מספר חיובי, נקבל $a=\sqrt{2}$.

אוכלוסיית החיידקים גדלה פי $\sqrt{2}$ בכל חצי שעה.

באופן דומה אפשר להמשיך ולשאול פי כמה גדלה אוכלוסיית החיידקים במשך רבע שעה, שליש שעה, שעה וחצי וכו'.

פעילות 3: זהירות, אינפלציה!

בתקופות של עליית מחירים גבוהה, גם הריביות בבנקים גבוהות.

נחשוב על תקופה שבה בנק גובה ריבית של 6% לחודש. נתעלם מעמלות ותשלומים אחרים שהבנק גובה.

לאדם יש חוב של שקל אחד. ללא חישוב, העריכו:

א. מה יהיה גודל החוב אם האדם יתעלם ממנו ולא יפעל בחשבונו במשך שנה אחת? (תשובה: בערך, 2.01 ₪.)

ב. מה יהיה גודל החוב אם האדם יתעלם ממנו ולא יפעל בחשבונו במשך 10 שנים? (תשובה: בערך, $1,088$ ₪.)

ג. מהי הפונקציה המתאימה למספר החודשים שיחלפו את גודל החוב? (תשובה: $f(x)=1.06^x$.)

נעקוב אחרי צמיחת החוב בבנק.

לאחר חודש אחד החוב יהיה: $1+\frac{6}{100}\cdot 1=1.06$.

לאחר חודשיים החוב יהיה: $1.06+\frac{6}{100}\cdot 1.06=1.06\left(1+\frac{6}{100}\right)=1.06^2=1.124$.

לאחר שלושה חודשים החוב יהיה: $1.06^2\cdot\left(1+\frac{6}{100}\right)=1.06^3=1.191$.

לאחר n חודשים יתפח החוב ל- 1.06^n ₪.

סעיף ב מדגיש את הגידול המהיר של הפונקציה המעריכית. אחרי 10 שנים (120 חודשים) חוב של שקל אחד יתפח לחוב של - $1.06^{120}=1{,}088$ שקלים.

הפונקציה המתארת את גידול החוב בבנק היא פונקציה מעריכית: $f(x)=1.06^x$.

אם הסכום ההתחלתי היה a שקלים, אז הפונקציה המתארת את החוב היא: $f(x)=a\cdot 1.06^x$.

באופן כללי: עבור חוב התחלתי של a שקלים וריבית של $r\%$ בחודש,

נוכל לרשום כי גודל החוב אחרי x חודשים הוא: $f(x)=a\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)^x$.

הרחבת ההגדרה של פעולות החזקה למעריכים ממשיים והגדרת הפונקציה המעריכית בעזרתה

כדי לטפל בפונקציות המעריכיות יש להכיר היטב את הגדרת החזקה. בסעיף זה נתאר את ההרחבה של פעולת החזקה מחזקות עם מעריך טבעי לחזקות עם מעריכים ממשיים. מתוך ההגדרות ומתוך חוקי החזקות אפשר יהיה להסיק את התכונות של הפונקציות המעריכיות, בהן נעסוק בהמשך. בסעיף שאחריו נביא מערכת אקסיומטית להגדרת פונקציה מעריכית, שתאפשר להצמיח את התכונות של הפונקציות המעריכיות בדרך אחרת.

הגדרת פעולת החזקה

במסגרת תכנית הלימודים של בית הספר היסודי נחשפים התלמידים למושג החזקה עם מעריך טבעי. במסגרת תכנית הלימודים של חטיבת הביניים הם נחשפים גם לחזקות עם מעריכים שלמים ומעריכים רציונליים. בחרנו להציג בספר זה את הגדרת מושג החזקה בשלמותו, כדי להדגיש את חשיבותו בבניית הפונקציה המעריכית ואת המורכבות שבהגדרתו.

התהליך מתחיל מהגדרת חזקה בה הבסיס הוא מספר ממשי כלשהו והמעריך - מספר טבעי.
נזכיר כי מספרים טבעיים הם מספרים שלמים חיוביים: $1,2,3,\ldots$. יש אינסוף מספרים טבעיים. המספר 0 אינו נחשב מספר טבעי.

שלב א – הגדרה בסיסית עבור מעריכים טבעיים

בשלב ראשון מגדירים את פעולת החזקה עבור מעריכים טבעיים בלבד באופן הבא:

$$\begin{cases} a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ פעמים}} \\ a^1 = a \end{cases}$$ או באמצעות כלל נסיגה: $$\begin{cases} a^n = a^{n-1} \cdot a, \quad n \geq 2 \\ a^1 = a \end{cases}$$

כדאי לשים לב לשתי עובדות:

1. בכל אחת מהדרכים נדרשת הגדרה נפרדת למעריך 1, שכן בהגדרה הישירה לא ניתן להתייחס לכפל של מספר בעצמו פעם אחת בלבד. בהגדרה הרקורסיבית a^1 הוא נקודת ההתחלה.
2. ההגדרות תקפות לחזקות עם מעריכים טבעיים בלבד. כדי לדבר על חזקות עם מעריכים אחרים יש להרחיב את ההגדרה.

מתוך ההגדרה בשלב א, מסיקים את חוקי החזקות למעריכים טבעיים. נשאיר את הוכחתם לקוראים.
להלן m,n הם מספרים טבעיים, ואם לא מצוין אחרת, a ו- b הם מספרים ממשיים כלשהם.

חוקי חזקות

1. $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$.
2. $a^{n-m} = \dfrac{a^n}{a^m}$ לכל $a \neq 0$ ולכל $n > m$. המגבלה הזו מאפשרת הפעלת ההגדרה, כי היא מבטיחה שהמעריך בביטוי a^{n-m} יהיה **מספר טבעי**.
3. $a^{n \cdot m} = \left(a^n\right)^m$.
4. $\left(a \cdot b\right)^n = a^n \cdot b^n$.
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ לכל $b \neq 0$.

לפי ההגדרה של חזקה עם מעריך טבעי, נוכל לחשב את ערכם של ביטויים כדלקמן:

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

$$\sqrt{2}^5 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{32}$$

לא נוכל לחשב את ערכם של הביטויים הבאים:

2^0, $2^{(-2)}$, $2^{\left(\frac{1}{2}\right)}$, $2^{\sqrt{2}}$.

כדי לתת ערכים לביטויים הללו, עלינו להרחיב את הגדרת החזקה עם מעריך טבעי, אשר הוצגה בשלב א, כך שניתן יהיה להציב במעריך החזקה מספרים שאינם מספרים טבעיים.
להלן נתאר את מהלך ההרחבה של ההגדרה: ראשית תורחב ההגדרה למעריך אפס, לאחר מכן למספרים שלמים שליליים, ואז לשברי יחידה, מכאן תורחב מיד למספרים רציונאליים, ולבסוף למעריכים אי-רציונאליים.

שלב ב – הרחבת ההגדרה למעריך אפס

ברור כי מעריך 0 לא יהיה בעל משמעות זהה לזו שהובילה להגדרה עבור מעריכים טבעיים, שכן לא נוכל לומר שאנו כופלים מספר בעצמו אפס פעמים. אנו רוצים לבחור ערך כזה שישמור על חוקי החזקות שכבר היכרנו.

לכל בסיס $a \neq 0$ מגדירים: $a^0 \overset{def}{=} 1$. (הביטוי 0^0 אינו מוגדר.)

פירושו: $\overset{def}{=}$ "שווה על-פי הגדרה"

אם נרצה להרחיב את החוק

$$a^{n-m} = \frac{a^n}{a^m}$$

גם למקרה של מעריכים שווים במונה ובמכנה נרצה שיתקיים:

$$a^0 = a^{n-n} = \frac{a^n}{a^n}$$

אם נרצה גם לשמור על הכלל על-פיו תוצאת חילוק של מספר בעצמו היא 1, נרצה שיתקיים:

$$\frac{a^n}{a^n} = 1$$

ומכאן המוטיבציה להגדרה.

הצגת החזקה באמצעות מצבים מציאותיים מספקת אף היא מוטיבציה להגדרה $a^0 = 1$. כפי שראינו בדוגמה של אוכלוסיית החיידקים (עמוד 424), גורם ההכפלה של אוכלוסיית החיידקים ברגע זמן x לאחר תחילת תהליך התרבותם (נקודת מוצא בה $x = 0$) הוא $E(x) = 2^x$. בתחילת התהליך כמות החיידקים לא השתנתה ולכן $E(0) = 1$. מצב זה מוביל להגדרה: $2^0 = 1$ ובעקבותיה – להגדרה: $a^0 = 1$.

שלב ג – הרחבת מושג החזקה למעריכים שלמים שליליים

כדי לתת משמעות לביטוי מהסוג: $2^{(-2)}$, יש להגדיר את a^{-n} עבור n טבעי.

a^{-n} מוגדר לכל $a \neq 0$ כ- $a^{-n} \overset{def}{=} \frac{1}{a^n}$.

כמוטיבציה להגדרה אפשר שוב להשתמש בהרחבת החוקים, או בסדרה ההנדסית, או במצב מציאותי מתאים:

(1) אם נרצה שבהגדרה המורחבת יישמר החוק לחילוק חזקות עם בסיסים שווים, נצטרך להגדיר את a^{-n}, עבור n טבעי, כך:

$$a^{-n} = a^{0-n} \overset{def}{=} \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}.$$

(2) אם נרצה להמשיך את הסדרה ההנדסית, המגיעה כבר אל מעריך 0:

$$..., a^5, a^4, a^3, a^2, a^1, a^0 ...$$

נצטרך להגיע אל האיבר השביעי על-ידי חלוקה ב- a ולקבל: $\frac{a^0}{a}=\frac{1}{a}$.

זאת אומרת שנרצה להגדיר: $a^{-1}\overset{def}{=}\frac{1}{a}$.

מכאן נוכל להגדיר כל חזקה עם מעריך שלם שלילי כך שיישמרו חוקים 3 ו- 5 (עמ' 427):

$$a^{-n}=a^{(-1)\cdot n}=\left(a^{-1}\right)^n=\left(\frac{1}{a}\right)^n=\frac{1^n}{a^n}=\frac{1}{a^n}$$

(3) גם הפעם נוכל לשאוב את המוטיבציה להגדרה מתוך מצבים מציאותיים.
בדוגמה של אוכלוסיית החיידקים המכפילה את עצמה פי 2 בכל שעה, מספר החיידקים שעה לפני הרגע שנחשב כנקודת המוצא הוא מחצית ממספרם בנקודת המוצא. לכן: $E(-1)=\frac{1}{2}$. מכאן, $E(-2)=\frac{1}{4}$, $E(-3)=\frac{1}{8}$ וכך הלאה, כך ש- $E(-n)=\frac{1}{2^n}$. היות ו- $E(n)=2^n$, נרשום, תוך שיקולי עקביות, $E(-n)=2^{-n}$, וכך נגיע להגדרה $2^{-n}=\frac{1}{2^n}$. כפי שרואים, ההגדרה $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$, שואבת מוטיבציה גם מהיכולת לשלב בתיאור תהליכי גידול, וגם את החזקה a^m עם מעריך שלם שלילי.

נציין כי בהגדרה $a^{-n}\overset{def}{=}\frac{1}{a^n}$ המספר a מופיע במכנה ולכן הגדרה זו תקפה רק עבור $a\neq 0$.

נשים לב, כי בכל שלוש הדרכים המובילות להגדרת a^{-n}, בסיס החזקה a שונה מ- 0 מטבע הדברים.

ההגדרות לעיל ביחד מגדירות חזקה עם מעריך שלם כלשהו. כעת, שוב באמצעות חוקי חזקות, נוכל להגיע להגדרת חזקה עם מעריך רציונאלי שאינו שלם, כפי שמתואר להלן.

שלב ד – הרחבת מושג החזקה למעריכים רציונאליים

כדי לתת משמעות לביטוי כמו: $2^{\left(\frac{2}{3}\right)}$ נצטרך להגדיר את פעולת החזקה עבור מעריכים רציונאליים.

נתחיל במקרה שהמעריך הוא מהצורה $\frac{1}{n}$ כאשר n מספר טבעי.

$a^{\frac{1}{n}}$ מוגדר לכל $a\neq 0$ כ- $a^{\left(\frac{1}{n}\right)}\overset{def}{=}\sqrt[n]{a}$.

נשתמש שוב בחוק החזקות השלישי על מנת לספק מוטיבציה להגדרה:

נרשום את המספר 1 כמכפלה של מספר טבעי בהופכי שלו: $1=\frac{1}{n}\cdot n$ ומכאן נוכל לרשום: $a^1=a^{\left(\frac{1}{n}\cdot n\right)}$. כעת נרצה להפעיל את החוק $a^{n\cdot m}=\left(a^n\right)^m$, על-אף שהמעריך הוא מכפלה של מספר רציונאלי במספר טבעי ולא של שני מספרים טבעיים חיוביים. שוב נדגיש כי בפעולה זו אנו מחפשים את האפשרות להרחיב את קבוצת המעריכים עליהם חל החוק. נקבל: $a=a^{\left(\frac{1}{n}\cdot n\right)}=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n$. כדי שהשוויון הזה אכן יתקיים, הערך המבוקש עבור $a^{\frac{1}{n}}$ צריך

להיות מספר שאם נעלה אותו בחזקה n נקבל את המספר a. זוהי בדיוק ההגדרה של $\sqrt[n]{a}$. כדי לשמור על החוק השלישי גם במקרה הנידון, עלינו להגדיר: $a^{\left(\frac{1}{n}\right)} \overset{def}{=} \sqrt[n]{a}$ עבור $n \ge 2$. הגדרה זו מוגבלת לתחום בו מוגדר השורש ה- n-י.

אם n זוגי, המספר a צריך להיות אי-שלילי.

נעבור עתה למעריכי חזקה רציונאליים כלליים.

יהי r מספר רציונלי, כלומר $r=\frac{p}{q}$ כאשר p,q מספרים שלמים ו- $q \ne 0$.

כידוע, לכל מספר רציונלי יש אינסוף ייצוגים שונים מהצורה הנ"ל. למשל: אם $r=-\frac{1}{2}$ אז הייצוגים הם:

$$r=\frac{-1}{2}=\frac{1}{-2}=\frac{2}{-4}=\frac{-3}{6}=\ldots$$

מאינסוף הייצוגים של r כ- $\frac{p}{q}$ נסכים לבחור ייצוג אחד המקיים את התנאים הבאים: א. המספר במכנה q הוא מספר טבעי. ב. $\frac{p}{q}$ הוא שבר מצומצם. עבור $r=-\frac{1}{2}$ הייצוג המקיים את התנאים האלה הוא $r=\frac{-1}{2}$.

על-פי החוק $a^{n\cdot m}=\left(a^n\right)^m$ והגדרת חזקה עם מעריך $\frac{1}{q}$ נרשום:

$$a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{1}{q}\cdot p}=\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p=\left(\sqrt[q]{a}\right)^p$$

וגם:

$$a^{\frac{p}{q}}=a^{p\cdot\frac{1}{q}}=\left(a^p\right)^{\frac{1}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$$

כלומר, אין חשיבות לסדר הפעולות: הוצאת שורש או העלאה בחזקה.

הגדרה

אם q מספר טבעי ו- p מספר שלם, אזי

$$a^{\frac{p}{q}} \overset{\text{def}}{=} \left(\sqrt[q]{a}\right)^p=\sqrt[q]{a^p}$$

גם כאן יש להגביל את ההגדרה של הפעולה עבור $a \ge 0$ כאשר q זוגי ו- p חיובי, עבור $a > 0$ כאשר q זוגי ו- p שלילי, עבור $a \ne 0$ כאשר q אי-זוגי ו- p שלילי, או $p=0$ ו- q מספר טבעי כלשהו.

הערה 1

בהגדרה לעיל מוגדרת חזקה עם כל מעריך רציונלי לא שלם. השאלה שעולה מידית היא, מדוע הגדרה מתבססת על ייצוג ספציפי של מספר r. הסיבה לכך כרוכה בתכונות של שורשים. ייתכן ש-

$$\sqrt[q]{a^p} \neq \sqrt[q\cdot k]{a^{p\cdot k}}$$

כאשר $k \geq 2$ מספר טבעי. למשל,

$$\underset{-2}{\sqrt[3]{-8}} \neq \underbrace{\sqrt[6]{(-8)^2}}_{2}$$

ו-

$$\underset{\text{לא קיים}}{\sqrt{-8}} \neq \underbrace{\sqrt[4]{(-8)^2}}_{2\sqrt{2}}$$

לכן אילו היינו משתמשים בהגדרת a^r עם r רציונלי בייצוג כלשהו של r, היינו מקבלים עבור $(-8)^r$ ערכים שונים עבור $r=\frac{1}{3}$ ועבור $r=\frac{2}{6}$. במקרה $r=\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$ אחד הערכים אינו קיים כלל. נציין עוד שהשוויון $\left(\sqrt[q]{a}\right)^p = \sqrt[q]{a^p}$ העומד באגף הימין של הנוסחה המגדירה את $a^{\frac{p}{q}}$, עלול לא להתקיים כאשר השבר $\frac{p}{q}$ אינו מצומצם. למשל, $\sqrt{(-2)^4} \neq \left(\sqrt{-2}\right)^4$ כי $\sqrt{-2}$ אינו קיים.

לסיכום: ניתן להגדיר את פעולת החזקה באופן חד-משמעי עבור מעריכים רציונליים בהצגתם כשברים מצומצמים עם מכנה טבעי. הצגתם כשברים לא מצומצמים עלולה להוביל לערכים שונים של אותה חזקה או לביטויים חסרי משמעות.

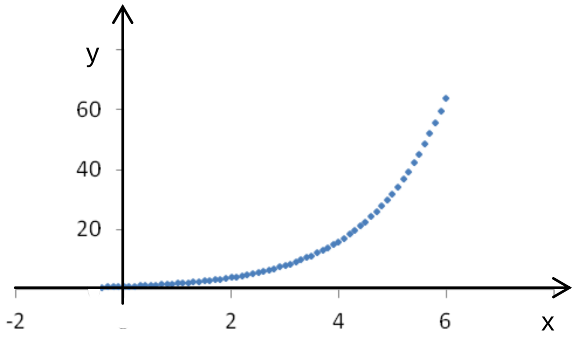
הערה 2

נציין כי כל הבעיות עם שברים לא מצומצמים בהגדרת a^r עבור r רציונלי מתעוררות כאשר a הוא מספר שלילי. אם $a>0$, כל ייצוג של r מביא לאותה תוצאה כי אז $\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q\cdot k]{a^{p\cdot k}}$ לכל k טבעי. כמו כן, במקרה זה $\left(\sqrt[q]{a}\right)^p = \sqrt[q]{a^p}$ לכל p שלם. כאשר בהמשך תוגדר חזקה a^x עם מעריך אי-רציונלי, התנאי $a>0$ יהיה תנאי הכרחי. מגבלה זו לא הוכנסה להגדרת חזקות עם מעריך רציונלי, כדי לשמור על עקביות עם האלגברה, בה חזקות עם מעריכים רציונליים מתפרשות כשורשים, ומתחת לשורש יכול להימצא מספר שלילי.

הערה 3

נזכיר כי באנליזה פונקציה מעריכית $y=a^x$ מוגדרת רק עבור בסיס חיובי ושונה מ- 1.

שלב ה – הגדרת החזקה למעריך אי-רציונאלי



איור 4

בגרף מופיעות הנקודות $(x,2^x)$ כאשר x משתנה בין הערכים: $-0.6\le x\le 6$ בצעדים של 0.1. ערכי הנקודות מוגדרים היטב היות ומעריכי החזקות הם מספרים רציונאליים. אנו משערים שאם נקטין את הצעד של השינוי ב- x, למשל נלך בצעד 0.01, נקבל נקודות קרובות יותר זו לזו. אחדים אולי מדמיינים, שאם נקטין מאוד את הצעד, למשל, עד 0.0001, נקבל גרף רציף. אלא שאין באפשרותנו ליצור קו רציף כזה, בתהליך שתואר ובאף תהליך אחר, כל עוד לא הגדרנו את פעולת החזקה עבור מעריכים אי-רציונאליים.

כדי ליצור קו רציף כזה עלינו להגדיר את פעולת החזקה גם עבור מעריכים אי-רציונאליים. בהרחבת ההגדרה ממעריכים טבעיים חיוביים למעריך אפס השתמשנו במוטיבציה של שמירה על חוקי החזקות. כאן נשתמש בתכונת הרציפות כמוטיבציה להגדרת הפעולה עבור מעריכים אי-רציונאליים. כיצד נעשה זאת?

כדי להגדיר את a^β, כש- $a>0$ ו- β מספר אי-רציונאלי, נבחר סדרת מספרים רציונאליים אשר מתכנסת ל- β, a^β מוגדר כגבול של סדרת החזקות a^{r_n}, כלומר $a^\beta=a^{\lim\limits_{n\to\infty}r_n}\overset{def}{=}\lim\limits_{n\to\infty}\left(a^{r_n}\right)$. ההוכחה שהגבול קיים ואינו תלוי בבחירת סדרת המספרים $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ חורגת מהמסגרת של ספר זה.[2]

בכך הושלמה הגדרת פעולת החזקה a^x עבור מעריך ממשי x כלשהו ובסיס $a>0$.

הערה

התנאי $a>0$ מופיע לראשונה כתנאי הכרחי בהגדרת החזקה a^β עם מעריך β אי-רציונלי. הסיבה להופעתו היא בכך שאם $a<0$ לא לכל סדרה $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ ניתן לבנות סדרה $\left\{a^{r_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, ובעקבות זה לא ניתן להגדיר a^β כגבול של **לכל** סדרה $\left(a^{r_n}\right)$ של מספרים רציונליים $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת ל- β.

חשוב לציין כי כל חוקי החזקות שצוינו בשלב א למעריכים טבעיים והניעו את הרחבת פעולת החזקה בשלבים ב-ד, נשארים בתוקף לחזקות עם מעריכים ממשיים כלשהם ובסיסים חיוביים. דהיינו, עבור $a,b>0$ ו- $x,y\in\mathbb{R}$ מתקיימים:

(1) $a^{x+y}=a^x\cdot a^y$, (2) $a^{x-y}=\dfrac{a^x}{a^y}$, (3) $a^{x\cdot y}=\left(a^x\right)^y$, (4) $(a\cdot b)^x=a^x\cdot b^x$, (5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=\dfrac{a^x}{b^x}$.

מהגדרת חזקה עם מעריך ממשי להגדרת הפונקציה המעריכית

לאחר שהגדרנו את פעולת החזקה לכל בסיס חיובי ולכל מעריך ממשי, נוכל להגדיר פונקציה מעריכית.

הגדרה

יהי נתון מספר ממשי קבוע a, $0<a\ne 1$. פונקציה ממשית אשר מתאימה לכל מספר ממשי x את ערך החזקה a^x, כפי שהוא הוגדר בשלבים א-ה לעיל, נקראת **פונקציה מעריכית**.

---

[2] ר' אנטון (1998) עמ' 454 – 464.

הערות

- לפי ההגדרה לעיל קיימות אינסוף פונקציות מעריכיות שונות בהתאם לבסיסים a שונים. לכן ניתן לדבר על משפחת פונקציות מעריכיות $\left\{a^x, x \in \mathbb{R}\right\}_{0<a\neq 1}$. הסיבות להחלטה לא לכלול את הפונקציה הקבועה $y=1$ בין הפונקציות המעריכיות נעוצה בתכונת המונוטוניות במובן החזק, שיש לפונקציות $y=a^x$ עם $0<a\neq 1$ ואין לפונקציה $y=1$. תכונה זו של הפונקציות המעריכיות חשובה, כי היא מבטיחה את קיומן של פונקציות הפוכות לפונקציות המעריכיות - הפונקציות הלוגריתמיות.
- מהגדרת פונקציה מעריכית ותכונות החזקות ניתן להסיק את שאר התכונות של פונקציות מעריכיות, בנוסף לתכונת המונוטוניות במובן החזק. אחת התכונות הבסיסיות והחשובות של פונקציות מעריכיות היא תכונת הרציפות עליה הצבענו קודם. בהמשך הפרק נטפל בתכונות הפונקציות המעריכיות ובתיאורן הגרפי.

הגדרת הפונקציות המעריכיות באמצעות מערכת אקסיומות

הפונקציה $E(x)$ כמודל מתמטי לתהליכי גידול

נחזור אל הדוגמה של גידול אוכלוסיית חיידקים.
עסקנו באוכלוסיית חיידקים (דמיונית) שמכפילה את עצמה פי 2 בכל שעה, באופן אחיד, בלי קשר למשך הזמן או לכמות החיידקים שכבר הצטברה.

סימנו ב- k את גודלה של אוכלוסיית החיידקים בזמן כלשהו, אליו התייחסנו כאל נקודת מוצא. סימנו ב- $E(x)$ את הפונקציה המתארת **פי כמה גדלה אוכלוסיית החיידקים** בחלוף x שעות מנקודת המוצא $x=0$.
מצאנו כי לכל $x=n$, כאשר n מספר טבעי, הערך של הפונקציה הוא $E(n)=2^n$.
מצאנו גם $E(0)=1$, $E(-1)=\frac{1}{2}$, $E(-2)=\frac{1}{4}$, $E\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}$.

כל הממצאים תואמים את ההגדרות של החזקה 2^x עם מעריך x שלם ורציונלי, כפי שהובאו בעמודים הקודמים.

כדי לעמוד על תכונות נוספות של הפונקציה $E(x)=2^x$ עבור x שלם נתבונן בכמה מערכיה:

$$E(1)=2,\ E(2)=4,\ E(3)=8,\ E(4)=16,\ E(5)=32,\ E(6)=64,\ E(7)=128$$

נבחין בתופעה:

$$\begin{gathered}E(7)=128\\ E(1)\cdot E(6)=2\cdot 64=128\\ E(2)\cdot E(5)=4\cdot 32=128\\ E(3)\cdot E(4)=8\cdot 16=128\end{gathered}$$

האם זה מקרי? ננסה דוגמאות נוספות:

$$\begin{gathered}E(6)=64\\ E(1)\cdot E(5)=2\cdot 32=64\\ E(2)\cdot E(4)=4\cdot 16=64\\ E(3)\cdot E(3)=8\cdot 8=64\end{gathered}$$

בכל הדוגמאות שבדקנו מצאנו: $E(x)E(y)=E(x+y)$.

נסביר תחילה את המקרה $E(7)=E(2)\cdot E(5)$ מנקודת המבט של תהליך הגידול של אוכלוסיית חיידקים.

נחשוב על תקופת הגידול של 7 שעות כעל שתי תקופות רצופות, האחת של שעתיים והשנייה של 5 שעות. לאחר יומיים כמות החיידקים גדלה פי $E(2)$, ועכשיו היא $k\cdot E(2)$ חיידקים, כאשר $k=E(0)$ הוא גודל האוכלוסייה בתחילת התהליך. בהתאם להנחה על אחידות קצב ההתרבות של חיידקים לאורך כל התהליך, **כל הכמות** שהייתה לאחר יומיים מתחילתו, גדלה במשך 5 השעות הנוספות פי $E(5)$ והופכת להיות $k\cdot E(2)\cdot E(5)$ חיידקים. אם כן, לאחר 7 שעות מתחילת התהליך כמות החיידקים ההתחלתית k גדלה פי $E(2)\cdot E(5)$. מכאן: $E(7)=E(2)\cdot E(5)$.

בדומה, נחשוב על גידול החיידקים בתקופה של $x+y$ שעות. ב- x השעות הראשונות כמות של k חיידקים הופכת להיות $k\cdot E(x)$ חיידקים. במהלך y השעות הבאות כמות של $k\cdot E(x)$ חיידקים גדלה פי $E(y)$ והופכת ל- $k\cdot E(x)E(y)$ חיידקים. במילים אחרות, במשך $x+y$ שעות כמות החיידקים ההתחלתית k מוכפלת ב- $E(x)E(y)$.

התכונה של קצב גידול אחיד, ללא קשר לכמות החיידקים המצויה בזמן כלשהו, מתבטאת אם כן בתכונה של הפונקציה E :

$$E(x)E(y)=E(x+y)$$

בנוסף לתכונה זו, נציין עוד שתי תכונות של $E\left(x\right)$ הנובעות מטבע הדברים: פונקציה זו אינה פונקציית אפס והנה פונקציה עולה.

בבואנו לחפש פונקציה (או משפחת פונקציות) $E\left(x\right)$ המתאימה לתאר תהליכי גידול בזמן רציף, אנחנו מחפשים פונקציה שמקיימת את התכונות עליהן הצבענו. תכונות אלה נקבל כתכונות יסוד. תכונות יסוד אותן אין צורך להוכיח נקראות **אקסיומות.** אוסף תכונות היסוד של פונקציות $E\left(x\right)$ נקרא **"מערכת האקסיומות** E**"**.

לאחר שנציג את מערכת האקסיומות E, נוכיח על בסיסה תכונות נוספות של פונקציות $E\left(x\right)$, ונראה שהפונקציות שתתקבלנה הן פונקציות מהמשפחה $E(x)=a^x$ כאשר $a>0$.

מערכת האקסיומות E

אקסיומה E1: פונקציה $E\left(x\right)$ היא פונקציה ממשית המוגדרת לכל מספר x בתחום $-\infty<x<\infty$.

אקסיומה E2: לכל שני מספרים ממשיים x,y מתקיים: $E(x+y)=E(x)E(y)$.

אקסיומה E3: פונקציה $E\left(x\right)$ היא פונקציה מונוטונית, עולה או יורדת, במובן החזק, כלומר לכל שני מספרים ממשיים $x<y$ מתקיים: $E\left(x\right)<E\left(y\right)$, או לכל שני מספרים ממשיים $x<y$ מתקיים: $E\left(x\right)>E\left(y\right)$.

הערה

אם פונקציה ממשית $f\left(x\right)$ מקיימת את כל שלוש האקסיומות של מערכת **E**, אומרים ש- $f\left(x\right)$ **מקיימת את מערכת E**.

מהתכונות של $E\left(x\right)$ אשר נמנות במערכת E ניתן להסיק מספר תכונות חשובות נוספות.

תכונות של פונקציה $E(x)$ הנובעות ממערכת האקסיומות E

א. אם פונקציה $E(x)$ מקיימת את מערכת E, אזי $E(0)=1$.

הוכחה

כיוון שהפונקציה $E(x)$ מונוטונית במובן החזק (אקסיומה $E3$), קיים מספר c עבורו: $E(c)\neq 0$. נרשום: $c=c+0$, נשתמש באקסיומה $E2$ ונקבל: $E(c)=E(c+0)=E(c)\cdot E(0)$. נחלק ב- $E(c)\neq 0$ ונקבל: $E(0)=1$. טענה א הוכחה.

ב. אם פונקציה $E(x)$ מקיימת את מערכת E, אז $E(x)>0$ לכל x ממשי.

הוכחה

יהי x מספר ממשי כלשהו. נרשום: $x=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}$, מכאן על-ידי שימוש באקסיומה E2 נקבל:

$$E(x)=E\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=E\left(\frac{x}{2}\right)\cdot E\left(\frac{x}{2}\right)=\left(E\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\geq 0$$

הוכחנו כי כל הערכים של הפונקציה $E(x)$ הם מספרים אי-שליליים.

כדי להראות שכל הערכים של פונקציה $E(x)$ חיוביים ניעזר בטענה א ובאקסיומה $E2$.

על-פי טענה א $E(0)=1$

על-פי אקסיומה E2 לכל x ממשי מתקיים: $E(0)=(x+(-x))=E(x)\cdot E(-x)$.

לכן לכל x ממשי $E(x)\cdot E(-x)=1$, ומכאן ש $E(x)\neq 0$ לכל x ממשי.

בכך הוכח כי $E(x)>0$ לכל x ממשי. טענה ב הוכחה.

גולת הכותרת של תכונות הפונקציה השייכת למערכת E היא הטענה הבאה:

ג. אם פונקציה $E(x)$ מקיימת את מערכת E, אז קיים a כך ש- $E(x)=a^x$ לכל x ממשי, כאשר a^x הוא ערך החזקה עם בסיס $a>0$ ומעריך x ממשי כלשהו.

הוכחה

תהי נתונה פונקציה $E(x)$ המקיימת את המערכת E ויהי $a=E(1)$. בסעיף הקודם הראינו שכל ערכי הפונקציה חיוביים, ולכן $a>0$.

נוכיח את הטענה בשלבים.

שלב 1: הוכחת הטענה עבור x טבעי

נוכיח באינדוקציה כי $E(n)=a^n$ לכל n טבעי ($n=1,2,3,...$).

עבור $n=1$ שוויון זה מתקיים כי: $E(1)=a^1=a$.

נניח כי הוא מתקיים עבור $n=k\geq 1$ מסוים, כלומר: $E(k)=a^k$, ונוכיח שמכך נובע שגם עבור $n=k+1$ הוא מתקיים, כלומר: $E(k+1)=a^{k+1}$.

ואמנם: $E(k+1)=E(k)\cdot E(1)=a^k\cdot a=a^{k+1}$.

לפי אקסיומת האינדוקציה השוויון $E(n)=a^n$ מתקיים לכל n טבעי. בכך הוכח כי $E(x)=a^x$ לכל x טבעי.

שלב 2: הוכחת הטענה עבור x שלם שלילי

נסמן: $x=-n$, נקבל:

$$1=E(0)=E(n+(-n))=E(n)\cdot E(-n)=a^n\cdot E(-n)$$

ולכן: $E(-n)=\frac{1}{a^n}=a^{-n}$, כלומר: $E(x)=a^x$ גם לכל שלם שלילי.

היות ולפי טענה א $E(0)=1$ ו- $a^0=1$ עבור $a>0$, השוויון $E(x)=a^x$ מתקיים גם עבור $x=0$.

בכך הוכח כי $E(x)=a^x$ לכל מספר x שלם.

שלב 3: הוכחת הטענה עבור x רציונלי

נפנה כעת למספר רציונלי שהוא שבר היחידה, כלומר: $x=\frac{1}{n}$, כאשר $n>1$ מספר טבעי.

אם נרשום את המספר 1 כסכום של n שברי יחידה, ונפעיל n פעמים את אקסיומה E2 , נקבל:

$$a=E(1)=E\Big(\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}...+\frac{1}{n}}_{\text{פעמים } n}\Big)=\left(E\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$$

מכאן נובע כי:

$$E\left(\frac{1}{n}\right)=\sqrt[n]{a}=a^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

יהי כעת $x=\frac{p}{q}$, כאשר $p\geq 1$ ו- $q>1$ מספרים טבעיים. נציג:

$$x=\underbrace{\frac{1}{q}+\frac{1}{q}+\frac{1}{q}+...+\frac{1}{q}}_{\text{פעמים } p}$$

בהפעלה p פעמים של האקסיומה E2 ובהסתמך על השוויון $E\left(\frac{1}{p}\right)=a^{\frac{1}{p}}$ שהוכח לעיל, נקבל:

$$E\left(\frac{p}{q}\right)=E\Big(\underbrace{\frac{1}{q}+\frac{1}{q}+\frac{1}{q}+...+\frac{1}{q}}_{\text{פעמים } p}\Big)=\left(E\left(\frac{1}{q}\right)\right)^p=\left(a^{\left(\frac{1}{q}\right)}\right)^p=a^{\left(\frac{p}{q}\right)}$$

בכך השוויון $E(x)=a^x$ הוכח לכל x רציונלי חיובי. מאקסיומה E2 נובע שהערך $E(-x)$ הופכי לערך $E(x)$ כי $E(x)\cdot E(-x)=E(0)=1$. לכן:

$$E\left(-\frac{p}{q}\right)=\frac{1}{E\left(\frac{p}{q}\right)}=\frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}=a^{-\frac{p}{q}}\ .$$

בכך השוויון $E(x)=a^x$ הוכח לכל x רציונלי.

שלב 4: הוכחת הטענה עבור x אי-רציונלי

כדי להוכיח את השוויון $E(x)=a^x$ גם עבור x אי-רציונלי, משתמשים בסדרות מונוטוניות של מספרים רציונאליים $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ המתכנסות (שואפות) למספר אי-רציונאלי x, כלומר:

$$\lim_{n\to\infty} r_n = x \tag{1}$$

לכל סדרה כזו, הסדרה $\{E(r_n)\}_{n=1}^{\infty}$ על-פי האקסיומה E3, היא סדרה מונוטונית חסומה ולכן יש לה גבול סופי מסוים, שנסמן אותו ב- w. כפי שהוכח קודם, $E(r_n)=a^{r_n}$. על-פי כל הנ"ל נוכל לסכם כי קיים הגבול :

$$\lim_{n\to\infty} E(r_n) = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} = w \tag{2}$$

כפי שצוין בסעיף הקודם, הפונקציה $y=a^x$ עם $a>0$ היא פונקציה רציפה. לכן מהשוויונות (1) ו- (2) לעיל נובע כי:

$$\lim_{n\to\infty} E(r_n) = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} = a^{\lim\limits_{n\to\infty} r_n} = a^x \tag{3}$$

אם נניח כי פונקציה $E(x)$ גם היא רציפה, אז מהשוויון (1) נקבל:

$$\lim_{n\to\infty} E(r_n) = E\left(\lim_{n\to\infty} r_n\right) = E(x) \tag{4}$$

מהשוויונות (3) ו- (4) מסיקים כי $E(x)=a^x$, כאשר x מספר אי-רציונלי.

בכך קיום השוויון $E(x)=a^x$ עם $a=E(1)>0$ הוכח עבור כל x ממשי (בהנחה ש- $E(x)$ היא פונקציה רציפה[3]).

טענה ג הוכחה.

מטענה ג נובע כי כל הפונקציות המקיימות את מערכת האקסיומות E שייכות למשפחת הפונקציות $\{a^x, x\in\mathbb{R}\}_{a>0}$.

קל לוודא באמצעות חוקי החזקות שכל פונקציה $y=a^x$ עם $1\neq a>0$, מקיימת את כל שלוש האקסיומות של מערכת E. הפונקציה $y=1^x$, לעומת זאת, היא פונקציה קבועה ולכן אינה מקיימת את אקסיומה E3.

אם כך, ניתן לומר שמערכת האקסיומות E מגדירה את משפחת הפונקציות $\{a^x, x\in\mathbb{R}\}_{1\neq a>0}$.

פונקציה מעריכית היא פונקציה המקיימת את מערכת האקסיומות E.

הגדרה זו שקולה להגדרה שניתנה בסעיף הקודם.

פונקציה ממשית $f(x)$ נקראת פונקציה מעריכית אם היא מתאימה לכל x ממשי את ערך החזקה a^x עם בסיס a המקיים את התנאים: $0<a\neq 1$.

מטרתנו כעת היא להגיע לתיאור גרפי של פונקציות מעריכיות. לשם כך, נסקור את תכונותיהן הנובעות מהגדרתן, הן אקסיומטית והן אלגברית.

[3] הוכחה של תכונת הרציפות של פונקציה ניתן למצוא אותה, למשל, אצל **אנטון** (1998) עמ' 454 – 464.

תכונות הפונקציות המעריכיות

תכונות יסוד

- כל פונקציה מעריכית מוגדרת לכל x ממשי.
- כל פונקציה מעריכית מקבלת ערכים חיוביים בלבד וערכה עבור $x=0$ הוא 1:

$a^x>0$ לכל x ו- $a^0=1$.

- כל פונקציה מעריכית היא פונקציה מונוטונית ממש: עולה כאשר $a>1$ ויורדת כאשר $0<a<1$:

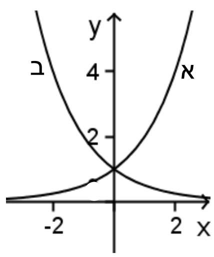
$$a>1,\ x_1<x_2 \Rightarrow \quad a^{x_1}<a^{x_2}$$
$$0<a<1,\ x_1<x_2 \Rightarrow a^{x_1}>a^{x_2}$$

תכונות נוספות

- כל פונקציה מעריכית היא פונקציה רציפה בכל התחום $-\infty<x<\infty$.
- כל פונקציה מעריכית אינה חסומה מלעיל, כי עבור $a>1$ מתקיים: $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty$, ועבור $0<a<1$ מתקיים: $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=+\infty$.
- כל פונקציה מעריכית, בהיותה חיובית חסומה מלרע, החסם התחתון שלה מלרע הוא 0, כי עבור $a>1$ מתקיים: $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0$, ועבור $0<a<1$ מתקיים: $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=0$, כלומר: הישר $y=0$ הוא אסימפטוטה אופקית לגרפים של כל הפונקציות המעריכיות בקרן אחת של ציר ה- x: חיובית עבור $0<a<1$ ושלילית עבור $a>1$.
- הפונקציות המעריכיות $f(x)=a^x$ ו- $g(x)=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ סימטריות זו לזו ביחס לציר ה- y, שכן: $\left(\frac{1}{a}\right)=a^{(-1)}$, ולכן: $g(x)=\left(\frac{1}{a}\right)^x=a^{(-x)}=f(-x)$. הגרפים של הפונקציות הללו הם שיקוף זה של זה ביחס לציר ה- y.

התיאור הגרפי של הפונקציה המעריכית $f(x)=a^x$, $a\neq1, a>0$

נסכם את התכונות של פונקציה $y=a^x$, $a>0$, $a\neq1$ בטבלה ונציג אותן בתמונה גרפית באיור 5.

תכונה	$a>1$	$0<a<1$	
נקודת חיתוך הגרף עם ציר y	$(0,1)$	$(0,1)$	 **איור 5** א. $a>1$ ב. $0<a<1$
מגמה	עלייה	ירידה	
אסימפטוטה אופקית	$y=0$	$y=0$	
גבולות	$\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=0$ $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=+\infty$	

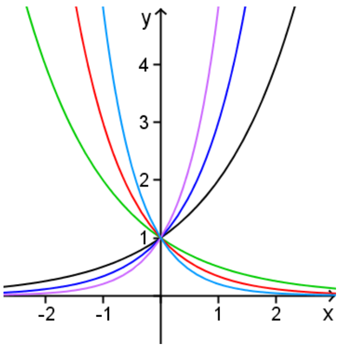
טבלה 2

הגרפים באיור 5 משקפים את התכונות של פונקציות מעריכיות שנדונו לעיל.

זיהוי פונקציות מעריכיות

לפניכם רשימה של פונקציות מעריכיות וגרפים שלהן. יש להתאים בין הגרפים לפונקציות.

1. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$
2. $y=2^x$
3. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$
4. $y=3^x$
5. $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$
6. $y=5^x$



איור 6

פתרון

המשימה מזמנת דיון נוסף בתכונות של הפונקציות המעריכיות, כדלקמן:
מתוך ההיכרות עם מושג החזקה ניתן לזהות שהגרף העולה התלול ביותר שייך לפונקציה $y=5^x$, היות ובכל נקודה $x>0$ הערך של 5^x גדול מהערכים של 2^x ושל 3^x. אפשר לדון גם בכך שעבור הפונקציות העולות $(a>1)$ קצב השינוי של הפונקציה עולה ככל שהבסיס גדול יותר. כלומר הפונקציה העולה עם קצב השינוי הגדול ביותר (גרף התלול ביותר) היא $y=5^x$.

באופן דומה, נוכל להסיק שעבור הפונקציות היורדות $(0<a<1)$ קצב השינוי עולה ככל שהבסיס קטן יותר, כך שהגרף התלול ביותר שייך ל- $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$.

קצב השינוי הוא, למעשה, פונקציית הנגזרת. נצפה, אם כן, לקשר דומה בין הנגזרות של הפונקציות המעריכיות.

באיור 6 מעניין לראות גם את הקשרים הבאים:

$\left(\frac{1}{5}\right)^x>\left(\frac{1}{3}\right)^x>\left(\frac{1}{2}\right)^x$ **לכל** $x<0$, $\left(\frac{1}{5}\right)^x<\left(\frac{1}{3}\right)^x<\left(\frac{1}{2}\right)^x$ **לכל** $x>0$.

ו-

$5^x>3^x>2^x$ **לכל** $x>0$, $5^x<3^x<2^x$ **לכל** $x<0$.

קשרים אלו נובעים מתכונת הסדר בין המספרים הממשיים ומהגדרת מושג החזקה לכל מעריך ממשי, תוך שמירה על חוקי החזקות.

כעת נעבור להגדרה וחקירה של פונקציות הפוכות לפונקציות מעריכיות הנקראות פונקציות לוגריתמיות.

הפונקציה הלוגריתמית

הגדרת הפונקציה הלוגריתמית $f(x)=\log_a x$ כפונקציה הפוכה ל- $g(x)=a^x$ $(a\neq 1, a>0)$[4]

נגדיר:

$$\log_a x = y \overset{def}{\Leftrightarrow} a^y = x$$

כלומר: הלוגריתם של המספר x לפי הבסיס a הוא המעריך של החזקה שבה צריך להעלות את הבסיס a כדי לקבל את המספר x. במילים אחרות: כאשר שואלים מהו הלוגריתם לפי בסיס 2 של המספר 8, אנו שואלים באיזו חזקה צריך להעלות את 2 כדי לקבל 8. התשובה היא 3. כותבים: $\log_2 8 = 3$.

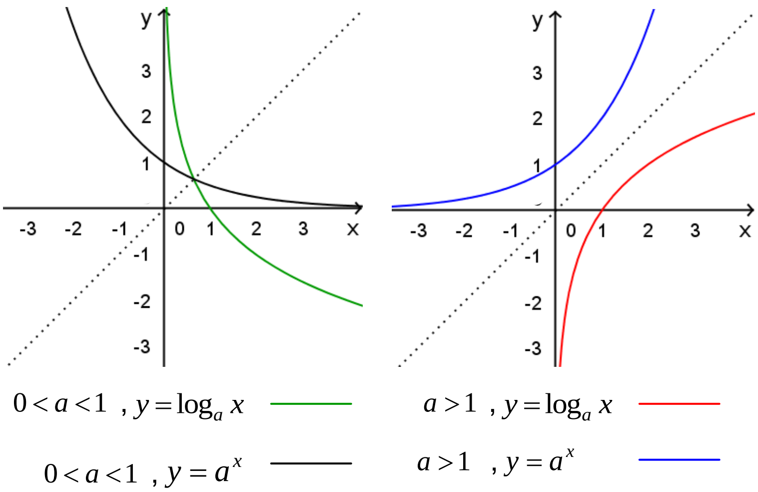
עולה מכך שפעולת הלוגריתם היא הפעולה ההפוכה לפעולת החזקה, והפונקציה הלוגריתמית $y=\log_a x$ היא פונקציה הפוכה לפונקציה מעריכית $y=a^x$ כאשר $a>0$, $a\neq 1$. עובדות אלו מזמנות שתי שאלות מרכזיות:

- אילו חוקים נוכל לנסח עבור פעולת הלוגריתם מתוך הידוע לנו ביחס לחוקי חזקות?
- אילו תכונות נוכל להסיק עבור הפונקציה הלוגריתמית מתוך הידוע לנו ביחס לפונקציה המעריכית?

תכונות הפונקציה

היות שהגרפים של פונקציה ופונקציה הפוכה לה סימטריים זה לזה ביחס לישר $y=x$, הרי שנוכל להסיק את התיאור הגרפי של הפונקציות הלוגריתמיות: $f(x)=\log_a x$ עבור ערכים שונים של בסיס a.

איור 7 מציג זוגות של פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות הפוכות.



איור 7

באיור 7 משתקפות התכונות הבאות של פונקציה לוגריתמית:

- הגרף עובר בנקודה $(1,0)$.
- הישר $x=0$ הוא אסימפטוטה אנכית.
- תחום ההגדרה הוא: $x>0$.
- עבור $a>1$ קצב העלייה יורד ככל שמתקדמים ימינה בציר ה-x.
- עבור $0<a<1$ קצב הירידה יורד ככל שמתקדמים ימינה בציר ה-x.

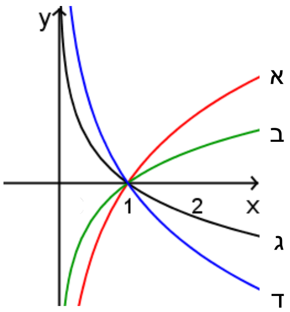
(שתי התכונות האחרונות פירושן ששיפועי הגרף של כל פונקציה לוגריתמית קטנים בערכם המוחלט ככל שמתקדמים ימינה בציר ה-x.)

[4] הגדרה נוספת של הפונקציה הלוגריתמית, באמצעות מערכת אקסיומות, ניתן למצוא בפרק ההשלמות עמוד 620.

זיהוי גרפים של פונקציות לוגריתמיות

באיור 8 מופיעים הגרפים של 4 פונקציות לוגריתמיות:

1. $y=\log_2 x$ .2 $y=\log_4 x$ .3 $y=\log_{0.5} x$ .4 $y=\log_{0.25} x$.



איור 8

א. זהו את הגרף המתאים לכל פונקציה.

ב. זהו זוגות של גרפים סימטריים ביחס לציר ה- x, והסבירו את הסימטריה על-פי חוקי הלוגריתמים.

תשובות

א. $\mathbf{y=\log_2 x}$ $\mathbf{y=\log_4 x}$ $y=\log_{0.5} x$ $\mathbf{y=\log_{0.25} x}$.

ב. הגרפים $y=\log_2 x$ ו- $y=\log_{0.5} x$ סימטריים זה לזה ביחס לציר ה- x.

הגרפים $y=\log_4 x$ ו- $y=\log_{0.25} x$ סימטריים זה לזה ביחס לציר ה- x.

הסבר: מהגדרת הלוגריתם נובע כי: $\log_{\left(\frac{1}{a}\right)} x=-\log_a x$ לכל $x>0$, $0<a\neq 1$.

להלן מוצגים חוקי הלוגריתמים אל מול חוקי החזקות המקבילים להם – אלה התורמים להוכחתם.

חוקי הלוגריתמים לצד חוקי החזקות

חוקי לוגריתמים	חוקי חזקות
1. $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$ מגבלות: $x>0$, $y>0$, $0<a\neq 1$	$a^{\beta+\delta}=a^\beta\cdot a^\delta$ מגבלה: $a>0$
2. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$ מגבלות: $x>0$, $y>0$, $0<a\neq 1$	$a^{\beta-\delta}=\frac{a^\beta}{a^\delta}$ מגבלה: $a>0$
3. $\log_a x^\delta=\delta\log_a x$ מגבלות: $x>0$, $0<a\neq 1$	$\left(a^\beta\right)^\delta=a^{\delta\cdot\beta}$ מגבלה: $a>0$
4. $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$ מגבלה: $0<a,\ a\neq 1, c>0, c\neq 1$, $b>0$	$\left(a^\beta\right)^\delta=a^{\delta\cdot\beta}$ מגבלה: $a>0$
5. $a^{\log_a(x)}=x$ מגבלה: $x>0$, $0<a\neq 1$ הנוסחה נובעת מהגדרת הלוגריתם.	לכל מספר $x>0$ קיים מספר ממשי y עבורו: $a^y=x$. מגבלה: $0<a\neq 1$

טבלה 3

הוכחת חוקי הלוגריתמים על בסיס חוקי החזקות נשארת לקוראים.

הערה

האותיות β, δ בטבלה מסמנות מספרים ממשיים כלשהם.
הכנסתן של אותיות אלה ולא אותיות x, y לתיאור חוקי החזקות, נועדה להקל על הוכחת חוקי הלוגריתמים על בסיס חוקי החזקות.

על השימוש בחוקי לוגריתמים

שימוש בחוקי לוגריתמים במהלך חקירת פונקציות או פתרון משוואות ואי-שוויונות דורש הקפדה על קיום תנאי תוקפם (מגבלות). כך למשל, השוויון $\log\left(x^2\right) = 2\log x$ הנרשם בהתאם לחוק הלוגריתמים השלישי מתקיים רק בתחום $x > 0$, למרות שהפונקציה באגף השמאלי קיימת לכל $x \neq 0$, כלומר, הפעלת החוק על הפונקציה $\log\left(x^2\right)$ מביאה לצמצום תחום הגדרתה. אילו היינו משתמשים באותו חוק בכיוון הפוך: $2\log x = \log\left(x^2\right)$, היינו מרחיבים את תחום הפונקציה $2\log x$ מ- $x > 0$ ל- $x \neq 0$. מצבים אלה עלולים לגרום לתופעות איבוד פתרונות או הוספת פתרונות מיותרים, בהתרת משוואות לוגריתמיות. בעמוד 484 נדגים מצבים כאלה ונדון בהם.

להלן אפיון כיווני ההפעלה של חוקי הלוגריתמים ביחס להשפעתם על תחום ההגדרה:

חוק ראשון:

צמצום תחום ההגדרה →

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

← הרחבת תחום ההגדרה

חוק שני:

צמצום תחום ההגדרה →

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

← הרחבת תחום ההגדרה

חוק שלישי:

צמצום תחום ההגדרה →

$$\log_a(x^n) = n\log_a x$$

← הרחבת תחום ההגדרה

נציין שהקפדה על תכונות אלו של חוקי הלוגריתמים נחוצה גם בחקירת פונקציות, בהתייחסות לתחום הקיום של הפונקציה. נדון בעניין זה באמצעות דוגמה בהמשך (עמוד 484).

שלוש נקודות מבט על הנגזרות של הפונקציות המעריכות והלוגריתמיות

כדי ללמוד תכונות של פונקציות המכילות את הפונקציות המעריכיות והלוגריתמיות עלינו להכיר את נגזרותיהן ואת המספר e. נציג כאן מספר דרכים להצמחה והוכחה של מושגים אלו. הדרכים נבדלות זו מזו בסדר ההצגה של הנגזרות, ובאופן ההצגה של המספר e. ניתן לבחור ביניהן על-פי שיקולים הקשורים לרמת הכיתה, לידע הקודם שלה, ושיקולים נוספים.
בחירת סדר ההוראה כרוכה בארבע החלטות מרכזיות :

- האם נקודת המוצא לדיון תהיה חיפוש איכותני אחר סקיצה של גרף הנגזרת של הפונקציה, על-פי תכונות הגרף של הפונקציה המקורית, או חיפוש אלגברי אחר הנגזרת, על-פי הגדרת הנגזרת?
- איזו נגזרת תוצג תחילה - נגזרת הפונקציה המעריכית או נגזרת הפונקציה הלוגריתמית?
- איך יוצג המספר e - כבסיס של פונקציה מעריכית שנגזרתה שווה לה, או כגבול של הסדרה $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
- האם נפתח במקרה כללי או במקרה פרטי מיוחד?

החלטות שונות הקשורות לשאלות אלו יכולות להוביל למסלולי הוראה רבים. טבלה 4 מציגה שלושה מסלולי הוראה אפשריים, אשר יתוארו בהמשך.

מסלול א: נקודת המוצא לדיון – חשיפת דמיון בין תכונות של פונקציות מעריכיות לתכונות נגזרותיהן

שלב 1	שלב 2	שלב 3	שלב 4	שלב 5
חשיפת דמיון בין תכונות של פונקציות מעריכיות לתכונות נגזרותיהן	הגדרת המספר e כבסיס של פונקציה מעריכית $y=e^x$ שנגזרתה $y=e^x$ שווה לה	הצגת נגזרת הפונקציה $y=a^x$	הצגת נגזרת הפונקציה $y=\ln x$ כפונקציה הפוכה לפונקציה $y=e^x$	הצגת נגזרת הפונקציה $y=\log_a x$

בכל שלב ניתן להציג משמעויות נוספות של המספר e.

מסלול ב: נקודת המוצא לדיון – הצגת הנגזרת של הפונקציה הלוגריתמית הכללית

שלב 1	שלב 2	שלב 3	שלב 4	שלב 5
היכרות עם המספר e כגבול של הסדרה $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	הצגת נגזרת הפונקציה הלוגריתמית הכללית $y=\log_a x$	הצגת נגזרת הפונקציה $y=\ln x$	הצגת נגזרת הפונקציה המעריכית הכללית $y=a^x$	הצגת נגזרת הפונקציה $y=e^x$

בקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת ניתן לדון לפני הצגת הנגזרות או לאחר הצגתן.

מסלול ג: נקודת המוצא לדיון – הצגת הנגזרת של הפונקציה המעריכית הכללית

שלב 1	שלב 2	שלב 3	שלב 4	שלב 5
היכרות עם המספר e כגבול של הסדרה $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	הצגת נגזרת הפונקציה המעריכית הכללית $y=a^x$	הצגת נגזרת הפונקציה $y=e^x$	הצגת נגזרת הפונקציה $y=\log_a x$	הצגת נגזרת הפונקציה $y=\ln x$

בקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת ניתן לדון לפני הצגת הנגזרות או לאחר הצגתן.

טבלה 4

כיוון ששלושת המסלולים חולקים אבני דרך משותפות, רוב אבני הדרך יוצגו במהלך ההצגה של מסלול ההוראה הראשון, בעוד שהתיאור של המסלולים האחרים יכלול רק תיאור של אבני דרך שלא הוצגו קודם לכן. לאחר הצגת האפשרויות השונות להוראת הנגזרות של הפונקציות המעריכות והלוגריתמיות, נדון בשיקולים שונים הקשורים לבחירת דרך ההוראה.

כל הדרכים מובילות אל:

הנגזרת של הפונקציה המעריכית: $\left(a^x\right)'=a^x\ln(a)$, והמקרה המיוחד $\left(e^x\right)'=e^x$.

הנגזרת של הפונקציה הלוגריתמית: $\left(\log_a x\right)'=\frac{1}{x\ln a}$ והמקרה המיוחד $\left(\ln x\right)'=\frac{1}{x}$.

כאשר $\ln x=\log_e x$, ו- e הוא המספר הטרנסצנדנטי המקיים: $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

פעילות 4: הצעה נדיבה לחיסכון – היכרות עם המספר e

תורם נדיב החליט להשקיע בחינוך לחיסכון של צעירי ישראל, והבטיח תמיכה נדיבה לבנקים שישתפו אתו פעולה. הוא החליט להעניק לכל בוגר בית ספר תיכון מענק של 1000 ₪, ולעודד אותו לחסוך את הכסף במשך שנה אחת, באחד מן הבנקים המשתתפים במבצע. כל בנק ניסה למשוך אליו כמה שיותר תלמידים, בתקווה שימשיכו להשקיע את כספם באותו הבנק גם בחייהם הבוגרים.

לפניכם הצעות משלושה בנקים.

בנק השפע

הפקידו אצלנו 1000 שקלים למשך שנה, ותקבלו בסוף השנה 2000 שקלים.

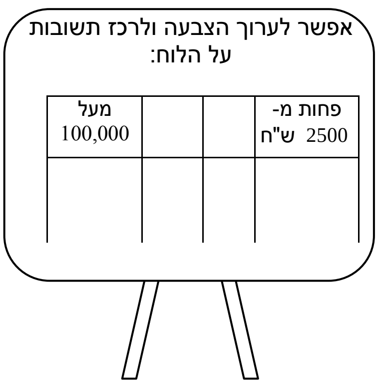
בנק הצמיחה

אצלנו תוכלו להפקיד את הכסף לתקופות של חצי שנה. לאחר חצי שנה תקבלו את הסכום שהפקדתם בתוספת ריבית של 50%. אם תרצו תוכלו להפקיד את הכסף לחצי שנה נוספת באותם התנאים.

בנק ההצלחה

אצלנו אפשר להפקיד את הכסף לתקופות של 3 חודשים בריבית של 25% ל- 3 חודשים. ניתן להפקיד את הכסף לתקופות נוספות של 3 חודשים במשך כל שנת המבצע.

1. ענו מבלי לחשֵב: בהצעה של איזה משלושת הבנקים הייתם בוחרים, לו רציתם להשאיר את הכסף בבנק למשך כל שנת המבצע?
2. חשבו כמה כסף יהיה בידי תלמיד שיפקיד את המענק למשך שנה שלמה, בכל אחד מן הבנקים.
3. נסו להעריך, מבלי לחשֵב: אם בנק יחליט על ריבית של $\frac{1}{365}$ מהסכום עבור כל יום – כמה יצטרך לשלם בסוף השנה?
4. ואם הבנק יחליט לחשב באופן דומה את הריבית כל שעה? כל דקה?



איור 9

נתבונן בהצעות של שלושת הבנקים.

בנק השפע משלם ריבית של 100% פעם בשנה. כלומר: $2000 = 1000\cdot\left(1+\frac{100}{100}\right)^1$.

בנק הצמיחה משלם ריבית של 50% כל חצי שנה. לאחר שנה נקבל: $2250 = 1000\cdot\left(1+\frac{50}{100}\right)^2$.

בנק ההצלחה משלם ריבית של 25% כל 3 חודשים, 4 תקופות בשנה: $2441.4 = 1000\cdot\left(1+\frac{25}{100}\right)^4$.

למעשה ניתן לתאר את הסכום שמקבל התלמיד בסוף השנה, לאחר n תשלומים כך:

$$1000\cdot\left(1+\frac{100}{100\cdot n}\right)^n = 1000\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

אם הריבית תהיה $\frac{1}{365}$ מהסכום כל יום, נקבל: $2714.57 = 1000\cdot\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365}$.

עד כה כל החישובים מרמזים על כך שככל שנגדיל את מספר התשלומים, אפילו על חשבון הקטנת הריבית, נקבל סכום גדול יותר. האם אכן כך הדבר?

נבדוק מה קורה כאשר מגדילים את n בצורה משמעותית. לשם כך, מספיק שנבחן רק פי כמה יגדל הכסף, כלומר, נחפש את הגבול של הביטוי: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ כאשר $n\to\infty$. נבחין שבסיס החזקה הולך וקטן והמעריך הולך וגדל.

להלן מספר ערכים המתקבלים באמצעות גיליון אלקטרוני:

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
500	2.7156
1000	2.7169
2000	2.7176
5000	2.7180
10000	2.7181
100000	2.7183
$n\to\infty$	e

טבלה 5

בהקשר של הבעיה שלנו: בשלב מסוים השינוי ב- n אינו משפיע באופן משמעותי על ערך החיסכון המתקבל.

אם נעגל לשתי ספרות אחרי הנקודה (אגורות) נראה שעבור 60 תשלומי ריבית של $\frac{1}{60}$ ועבור 100 תשלומי ריבית של $\frac{1}{100}$ נקבל בדיוק אותו רווח.

גבול הסדרה $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ הוא מספר אי-רציונלי המסומן ב- e. הוא מכונה לעתים המספר של אוילר, על שמו של המתמטיקאי Leonhard Euler.

להלן כמה מהספרות הראשונות של e: $e = 2.7182818284590452353602874713527....$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e.$$

עוד על המספר *e*

המספר e הוא גם גבול הפונקציה $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ כאשר $x\to\infty$, כלומר, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

המספר e הוא גם גבול הפונקציה $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ כאשר $x\to 0$, כלומר, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

המספר הוא גם גבול נוסף של: $e=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}$

נחזור עתה לדון בפירוט בשלושת מסלולי ההוראה על שלביהם השונים .

מסלול א: נקודת המוצא לדיון – חשיפת דמיון בין תכונות של פונקציות מעריכיות לנגזרותיהן

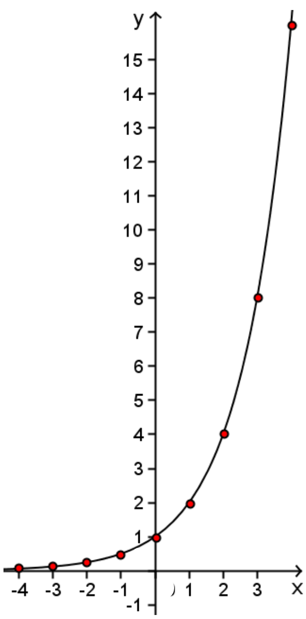
שלב 1 – חשיפת דמיון בין תכונות של פונקציות מעריכיות לתכונות נגזרותיהן

לגרפים של הפונקציות המעריכות עם בסיס גדול מ- 1 ולנגזרותיהן תכונות ויזואליות משותפות בולטות. תכונות אלה אינן מקריות אלא נובעות מהעובדה שהפונקציה הנגזרת של כל פונקציה מעריכית מתקבלת על-ידי כפל הפונקציה בקבוע חיובי. עובדה זו תידון ותוכח בהמשך.

הצגת הנגזרות של הפונקציות המעריכות מנקודת המבט של הדמיון בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת, יכולה להוביל לדיון מרתק ששיאו הגילוי שקיימת פונקציה שונה מ- 0 שנגזרתה זהה לה.

סידרת השאלות הבאה, שיכולה להיות מוצגת באמצעות דף עבודה או בעל פה, יכולה להיות פתיח לדיון.

לפניכם גרף הפונקציה $y=2^x$ שסורטט באמצעות טבלת ערכים.



איור 10

1. ערכו רשימת תכונות של גרף הפונקציה. נסו להסביר את התכונות לא רק באמצעות הגרף המסורטט אלא גם על סמך שיקולים נוספים.
2. על בסיס הגדרת הנגזרת כשיפוע של פונקציה, לכל אחת מהתכונות של הפונקציה מהרשימה שערכתם בסעיף 1, רשמו, **אם אפשר**, תכונה של הנגזרת שאפשר להסיק מתכונת הפונקציה על-ידי ההתבוננות בגרף הפונקציה.
3. אם יש ברשימתכם תכונות של הפונקציה המקורית שלא ניתן להסיק מהן תכונות של הפונקציה הנגזרת, ציינו אותן, והסבירו מדוע לא ניתן להסיק מהן תכונות של הנגזרת.
4. האם לדעתכם התכונות של הפונקציה ושל הנגזרת אותן רשמתם מתאימות גם לפונקציה $y=3^x$?
5. האם לדעתכם הפונקציה הנגזרת של הפונקציה $y=3^x$ זהה לפונקציה הנגזרת של $y=2^x$?

   (בחרו את התשובה המתאימה ונמקו: כן/ לא/ אין לי דרך לדעת.)
6. בוודאי שמתם לב שלפונקציה המקורית $y=2^x$ ולפונקציה הנגזרת שלה יש תכונות משותפות רבות. האם לדעתכם הפונקציה ונגזרתה מתלכדות?

   (בחרו את התשובה המתאימה ונמקו: כן/ לא/ אין לי דרך לדעת.)
7. האם לדעתכם הנגזרת של הפונקציה $y=2^x$ היא פונקציה מעריכית?

8. הסבירו מדוע הביטוי $\lim_{h\to 0}\frac{(2^h-1)}{h}$ מבטא את הנגזרת של הפונקציה $y=2^x$ כאשר $x=0$. העריכו את שיפוע גרף הפונקציה $y=2^x$ כאשר $x=0$ וענו שנית על שאלות 6 ו- 7.

דיון בתשובות לשאלות 8-1

1. תכונות ויזואליות בולטות של הפונקציה $y=2^x$:
   א. תחום הפונקציה הוא כל הישר הממשי.
   ב. הפונקציה חיובית בכל התחום.
   ג. הפונקציה עולה בכל התחום.
   ד. גרף הפונקציה נעשה יותר תלול ככל ש- x גדל.
   ה. כאשר ערכי x שליליים גדולים מאוד בערכם המוחלט ($x\to-\infty$), ערכי הפונקציה קטנים מאוד.
   ו. כאשר ערכי x שליליים גדולים מאוד בערכם המוחלט ($x\to-\infty$), שיפועי הפונקציה קטנים מאוד.

   ברור כי טבלת ערכים אינה מבטיחה קבלת גרף המייצג נאמנה את הגרף האמיתי של הפונקציה.
   היות והדיון מכוון **להעלאת השערות** על תכונות הפונקציה הנגזרת, על סמך התכונות של הפונקציה המקורית, חשוב לבסס לפחות חלק מתכונות הפונקציה המקורית לא רק על מראה עיניים, אלא גם על חוקי האלגברה. את רוב התכונות נוכל להצדיק בקלות. אל תכונה ד נתייחס כאל השערה.

2. טבלה 6 מסכמת תכונות של הפונקציה, כפי שהן עולות מן הגרף, ותכונות משוערות של הנגזרת שניתן להסיק מהן.

תכונות הפונקציה על-פי הגרף		תכונות משוערות של הנגזרת
תחום הפונקציה הוא כל הישר הממשי.		
הפונקציה חיובית בכל התחום.		
כאשר $x\to\infty$, אזי $y\to\infty$.		
כאשר $x\to\infty$, שיפועי הפונקציה גדלים ללא מגבלה.	⇦	כאשר $x\to\infty$, $y'\to\infty$.
הפונקציה עולה בכל התחום.	⇦	הנגזרת חיובית בכל התחום.
גרף הפונקציה נעשה תלול יותר ככל ש- x גדל.	⇦	הנגזרת עולה בכל התחום.
כאשר $x\to-\infty$, $y\to 0$.		
כאשר $x\to-\infty$, שיפועי הגרף שואפים לאפס.	⇦	כאשר $x\to-\infty$, אזי $y'\to 0$.

טבלה 6

3. התאים הריקים בעמודה השמאלית של הטבלה מדגישים תכונות של הפונקציה מהן לא נוכל להסיק תכונות של הנגזרת.

4. שאלה זו ניתנה כדי להרחיב את הדיון לפונקציות מעריכיות נוספות. התחושה שכל מה שנאמר לגבי הפונקציה $y=2^x$ מתאים גם לפונקציה $y=3^x$ היא מאוד אינטואיטיבית.

5. עבור ערכי x חיוביים גרף הפונקציה $y=3^x$ תלול יותר מאשר גרף הפונקציה $y=2^x$, ולכן לא ייתכן שהנגזרות של שתי הפונקציות שוות זו לזו.

6. התשובה המידית של תלמידים רבים צפויה להיות "אין לי דרך לדעת". בשלב זה של הדיון כדאי להעריך את השיפוע של גרף הפונקציה $y=2^x$ בנקודת החיתוך עם ציר ה- y, בעזרת מנות הפרשים בין הנקודה $x=0$ ושתי נקודות קרובות.

x	$y=2^x$
0	1
0.001	$2^{0.001}\approx 1.00069339$
-0.001	$2^{-0.001}\approx 0.99930707$

טבלה 7

מנת ההפרשים בין הנקודות $(0,1)$ ו- $\left(0.001,2^{0.001}\right)$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2^{0.001}-1}{0.001-0}\approx\frac{1.00069339-1}{0.001}\approx 0.69339$$

מנת הפרשים בין הנקודות $(0,1)$ ו- $\left(-0.001,2^{-0.001}\right)$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2^{-0.001}-1}{-0.001-1}\approx\frac{0.99930707-1}{-0.001}\approx 0.69293$$

הערכים האלה הם שיפועי המיתרים של הגרף $y=2^x$ המחברים בין הנקודה $(0,1)$ ושתי נקודות קרובות על פני הגרף, אחת משמאל לנקודה $(0,1)$ והשנייה – מימין לה. שיפוע הגרף $y=2^x$ בנקודה $(0,1)$ נמצא בין השיפועים של המיתרים האלה, כפי שניתן לראות מהגרף.
מכאן ניתן להסיק ששיפוע הגרף $y=2^x$ בנקודה $(0,1)$ כלוא בין הערכים 0.69293 ו-0.69339. לכן הוא קטן מ- 1, ומכאן שהפונקציה הנגזרת לא מתלכדת עם הפונקציה המקורית.
חישובי השיפוע של גרף הפונקציה חשובים, כפי שנראה, גם להמשך הדיון.

7. כיוון שערך הפונקציה הנגזרת כאשר $x=0$ אינו שווה ל- 1, הפונקציה הנגזרת אינה יכולה להיות שום פונקציה מעריכית.

8. נכתוב ביטוי לנגזרת הפונקציה $y=2^x$ כאשר $x=0$ ונקבל: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(2^{0+h}-2^0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{(2^h-1)}{h}$.
בסעיף 6 ערכנו חישוב מקורב לנגזרת כאשר $x=0$ וראינו שהיא שונה מ- 1.

הדמיון בתכונות בין הפונקציה $y=2^x$ לנגזרתה אינו מקרי. הוא נובע מן הקשר ביניהן. כדי לקבוע אותו, נרשום ביטוי לנגזרת של פונקציה מעריכית a^x $(a>0,a\neq 1)$, על-פי הגדרת הנגזרת בנקודה x:

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^x\cdot a^h-a^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h-1)}{h}=\lim_{h\to 0}a^x\frac{(a^h-1)}{h}=a^x\lim_{h\to 0}\frac{(a^h-1)}{h}$$

קיבלנו: $(a^x)'=a^x\cdot(a^x)'\big|_{x=0}$.

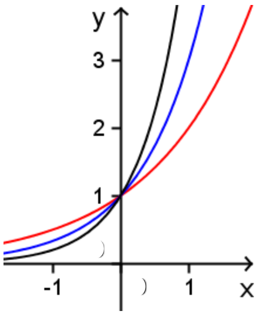
פונקציית הנגזרת של כל פונקציה מעריכית שווה לפונקציה עצמה כפול קבוע, השווה לנגזרת הפונקציה בנקודה $x=0$.

בפונקציות מעריכיות עם בסיס גדול מ- 1 הנגזרת בנקודה $x=0$ היא מספר חיובי, ומכאן הדמיון בין תכונות הפונקציה לתכונות הנגזרת.

נציין כי מסקנה זו התקבלה בהנחה שהנגזרת של פונקציה מעריכית קיימת לכל x ממשי. כדי להצדיק הנחה זו, מספיק, כפי שנובע מהפיתוח לעיל, להוכיח את קיום הגבול $\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$. הוכחה זו תובא בהמשך.

שלב 2: הצגת המספר e כבסיס של פונקציה מעריכית $y=e^x$ שנגזרתה שווה לה

הדמיון בין תכונות הפונקציות המעריכיות עם בסיס גדול מ- 1 והקשר $(a^x)'=a^x\cdot(a^x)'_{(x=0)}$ מעלים את השאלה: "האם קיימת פונקציה מעריכית שנגזרתה שווה לה?". ברור שאם אכן קיימת פונקציה כזאת עליה להיות פונקציה מעריכית עם בסיס גדול מ- 1 (מדוע?).



איור 11

איור 11 מציג פונקציות מהמשפחה $y=a^x$ עם בסיס גדול מ- 1.

מתכונות החזקה ידוע לנו:

אם: $1<a_1<a_2<a_3$, אזי: בקרן הימנית של ציר ה- x: $(a_1)^x<(a_2)^x<(a_3)^x$.

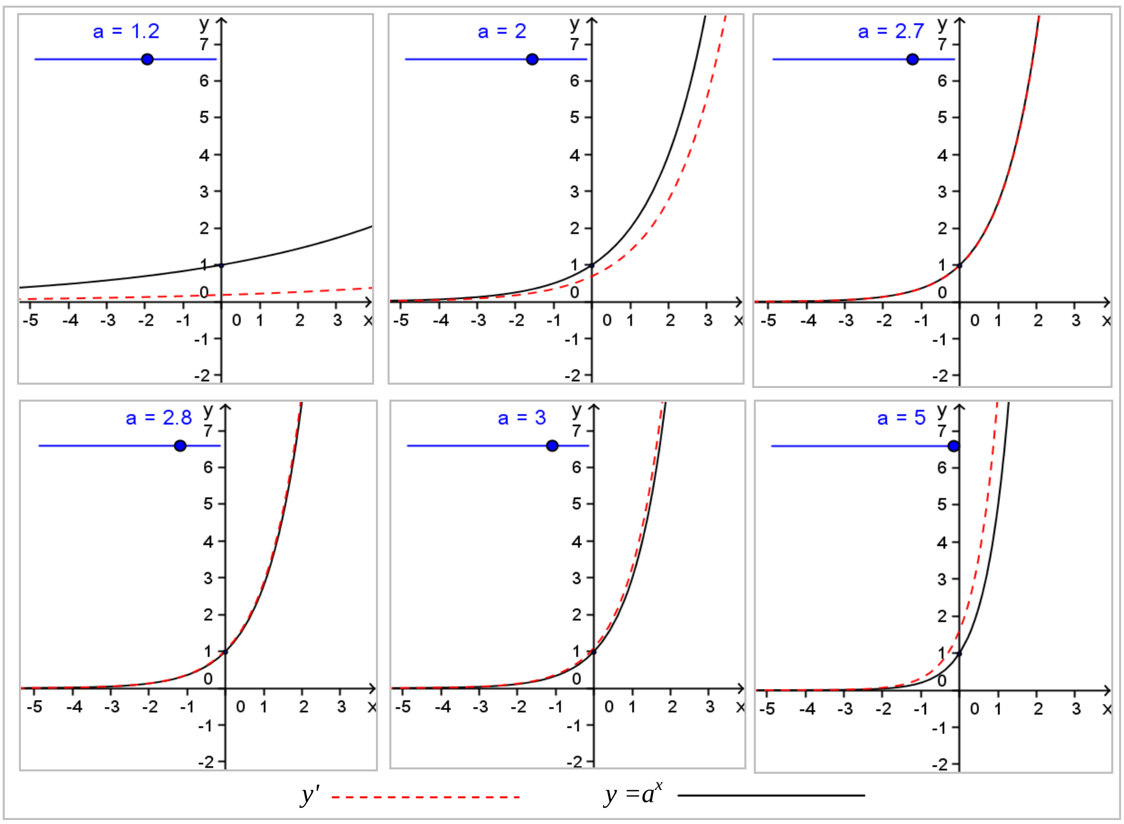
בקרן השמאלית של הציר: $(a_1)^x>(a_2)^x>(a_3)^x$, כמודגם באיור 11.

כאשר $0<a_1<a_2<a_3<1$, המצב הפוך.

מתוך כך, נוכל לצפות, שעבור $a>1$ שיפוע המשיק לגרף של הפונקציה המעריכית $y=a^x$ בנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y, גדל ככל שגדל הערך של a.

ראינו קודם שהנגזרת של הפונקציה $y=2^x$, כאשר $x=0$, קטנה מ- 1.

באופן דומה אפשר להראות שהנגזרת של הפונקציה $y=3^x$, כאשר $x=0$, גדולה מ- 1.



איור 12

בהנחה ששיפועי הפונקציות מהמשפחה $y=a^x$, $a>1$, כאשר $x=0$, עולים ברציפות ככל ש- a גדל, נצפה, על-פי משפט ערך הביניים (עמוד 605), למצוא פונקציה $y=a^x$, $2<a<3$, שנגזרתה, כאשר $x=0$, שווה ל- 1.
אפשר להתקרב באופן ניסיוני אל הבסיס המבוקש באמצעות חישובים ידניים, גיליון אקסל, או תוכנה גרפית דינמית.
איור 12 מדגים באמצעות מסכים של תוכנה גרפית דינמית כיצד משתנות הפונקציות $y=a^x$ (קו שחור רצוף) ונגזרותיהן (קו אדום מרוסק), בעקבות שינוי הפרמטר a.
בנקודה זו ניתן להגדיר את המספר e כבסיס של פונקציה מעריכית שנגזרתה שווה לה. אם הגדרנו כבר את המספר e בדרך אחרת, נוכל לומר שהבסיס המבוקש הוא המספר e שהוגדר קודם ולהבטיח הוכחה בשלב מאוחר יותר. אפשר להביא בנקודה זו הצגות נוספות של המספר e (למשל, את הצגתו כסכום של אינסוף מחוברים הולכים וקטנים), ללא הוכחה שכל ההצגות אכן מובילות אל אותו מספר.
נוכל לסכם:

קיימת פונקציה מעריכית $y=e^x$ שנגזרתה זהה לה, כלומר, שווה לה לכל x ממשי: $y'=\left(e^x\right)'=e^x$.

שלב 3: נגזרת הפונקציה המעריכית הכללית $y=a^x$

כמו לכל פונקציה מעריכית גם לפונקציה $y=e^x$ יש פונקציה הפוכה $y=\log_e x$. הפונקציה הלוגריתמית שבסיסה e נקראת פונקציית הלוגריתם הטבעי ומסומנת $y=\ln x$.
לפי חוקי הלוגריתמים לכל a חיובי ושונה מ- 1 ניתן לרשום:

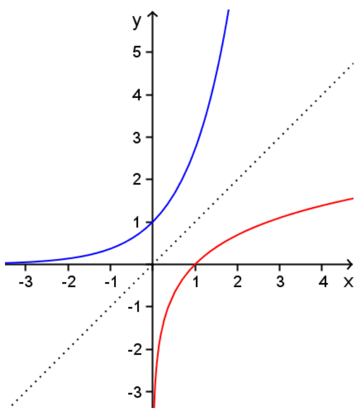
$$y=a^x=e^{x\cdot\ln a}$$

נגזור את הפונקציה כפונקציה מורכבת ונקבל:

$$y'=\left(a^x\right)'=\left(e^{x\cdot\ln a}\right)'=e^{x\cdot\ln a}\cdot\ln a=a^x\cdot\ln a$$

שלב 4: הצמחת הנגזרת של הפונקציה $y=\ln x$ כנגזרת של פונקציה הפוכה לפונקציה $y=e^x$

איור 13 מציג במערכת צירים אחת את גרף הפונקציה $y=\ln x$ (באדום), וגרף הפונקציה $y=e^x$ (בכחול). גרף הפונקציה $y=\ln x$ הוא שיקוף של גרף הפונקציה $y=e^x$ בישר $y=x$, המופיע באיור בקו מנוקד[5]. מכאן נוכל להסיק תכונות של הפונקציה $y=\ln x$ על-פי תכונות הפונקציה $y=e^x$.
נרשום תכונות של הפונקציה $y=\ln x$ ונסיק מהן תכונות של הנגזרת.



איור 13

[5] הקשר בין הגרפים של פונקציות הפוכות נידון בהרחבה בעמוד 258.

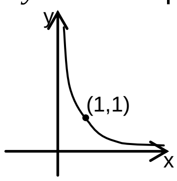
תכונות הפונקציה $y=\ln x$		תכונות הנגזרת $y'=(\ln x)'$
תחום ההגדרה $x>0$.	$\Leftarrow$	תחום ההגדרה $x>0$.
הפונקציה עולה בכל תחום ההגדרה.	$\Leftarrow$	הנגזרת חיובית בכל תחום ההגדרה.
ככל ש- x גדל, שיפועי הפונקציה הולכים וקטנים.	$\Leftarrow$	הנגזרת יורדת בכל תחום ההגדרה.

טבלה 8

בנוסף ידוע לנו:

- כאשר $x\to\infty$ שיפועי הנגזרת של הפונקציה $y=e^x$ שואפים לאינסוף. מתכונת טרנספורמציית השיקוף של גרפים של פונקציות בישר $y=x$, נובע שכאשר $x\to\infty$ שיפועי הפונקציה $y=\ln x$ הם מספרים הופכיים לשיפועי $y=e^x$, ולכן הם שואפים לאפס, כלומר, $(\ln x)'\underset{x\to\infty}{\to}0$.
- מהגדרת המספר e נובע שנגזרת הפונקציה $y=e^x$ שווה ל- 1 בנקודה $x=0$. מתכונת טרנספורמציית השיקוף של גרפים של פונקציות בישר $y=x$, נובע כי בנקודה (1,0) שיפוע גרף הפונקציה $y=\ln x$ הוא $\frac{1}{1}=1$. מכאן שגרף הנגזרת עובר בנקודה (1,1).

כעת נוכל לסרטט גרף משוער $y=(\ln x)'$ על-פי התכונות שרשמנו (איור 14).



איור 14

הערה

הדיון בכיתה בתכונות של נגזרת הפונקציה $y=\ln x$ תלוי כמובן בתלמידי הכיתה ובידע הקודם שלהם. חשוב לשים לב לערך המוסף של דיון מסוג זה, מעבר לקבלת גרף משוער של נגזרת הפונקציה $y=\ln x$. בנוסף הדיון תורם:

- לביסוס הבנת הקשרים בין גרף פונקציה לגרף הפונקציה ההפוכה לה.
- לביסוס הבנת הקשר בין פונקציה לנגזרתה.
- לביסוס ההיכרות עם גרף הפונקציה המעריכית $y=e^x$, ובפרט למשמעותו של המספר e , כבסיס של פונקציה מעריכית שנגזרתה זהה לה.

מציאת נגזרת הפונקציה הלוגריתמית

הפונקציה $y=\ln x$ היא הפונקציה ההפוכה של $y=e^x$.

נשתמש בקשר בין הפונקציות לקבלת הנגזרת של הפונקציה הלוגריתמית:

נסמן: $y=\ln x$, אזי:

$$e^y=x .$$

נגזור את הפונקציות שבשני האגפים לפי x , ונקבל:

$$e^y\cdot y'=1 .$$

לכן:

$$y'=\frac{1}{e^y}=\frac{1}{e^{\ln(x)}}=\frac{1}{x} .$$

נציב בחזרה $y=\ln(x)$, ונקבל:

$$\left(\ln(x)\right)'=\frac{1}{e^{\ln(x)}}=\frac{1}{x} .$$

אפשר גם אחרת

אם התלמידים מכירים את הקשר בין הנגזרת של פונקציה $f(x)$ לנגזרת הפונקציה ההפוכה לה $g(x)=f^{-1}(x)$, נוכל לבסס עליו את מציאת הנגזרת של הפונקציה $y=\ln x$.

הקשר בין נגזרות של פונקציות הפוכות:

$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$$

במילים: הנגזרות של שתי פונקציות הפוכות של משתנה x הן הופכיות זו לזו, בתנאי שבנגזרת של אחת מהפונקציות, המשתנה x מוחלף בפונקציה השנייה.

במקרה של הפונקציות הנידונות:

$$f(x)=e^x$$
$$g(x)=\ln x$$

ובהתאם: $f'(x)=e^x$ ו- $f'(g(x))=e^{\ln x}$.

על-פי נוסחת הקשר בין הנגזרות לעיל, נקבל:

$$(\ln x)'=\frac{1}{e^{\ln x}}=\frac{1}{x}$$

הערה:

בכל הנוסחאות המכילות את $\ln x$ קיימת מגבלה כי $x>0$.

שלב 5: הנגזרת של פונקציה לוגריתמית כללית

המעבר לנגזרת של פונקציה לוגריתמית כללית $\log_a x$ עם $a>0, a\neq 1$, הוא מידי:

$$(\log_a x)'=\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)'=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}$$

לפי חוקי הלוגריתמים

לפי נגזרת מכפלה של פונקציה בקבוע

שלב 6: הצגת המספר e כגבול של סדרה והוכחת השקילות בין הגדרה זו להגדרת המספר e כבסיס של פונקציה מעריכית שנגזרתה שווה לה [6]

כדי להראות את שקילות ההגדרות הנ"ל יש להגדיר את מספר e כגבול הסדרה האינסופית $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$, ולהוכיח כי עבור המספר e המוגדר באופן כזה, נגזרת הפונקציה e^x, היא הפונקציה עצמה. במילים אחרות, יש להשתמש באבני הדרך של אחד מן המסלולים, שנקודת המוצא שלו היא הגדרת המספר e כגבול הסדרה:

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$$

לשם כך:

- נמצא את הנגזרת של הפונקציה $y=\ln x$. המספר e שבבסיס הלוגריתם הוא עכשיו גבול הסדרה:

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$$

- נמצא את הנגזרת של הפונקציה $y=e^x$ כנגזרת הפונקציה ההפוכה לפונקציה $y=\ln x$, ונוודא שנגזרת זו זהה לפונקציה המקורית.

הערה

התוצאה המפתיעה, שהנגזרת של הפונקציה $y=e^x$ היא הפונקציה עצמה, מוכיחה ששתי ההגדרות של המספר e, הגדרתו כבסיס של פונקציה שנגזרתה שווה לה, והגדרתו כגבול של הסדרה $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$, מגדירות את אותו המספר.

כדי לבצע את שתי המשימות שהוצגו לעיל, עלינו להביא מספר השלכות של הגדרת המספר e כגבול הסדרה. כלומר: מההגדרה

(1) $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, (n מספר טבעי).

נובע כל אחד מהשוויונות הבאים:

(2) $\lim\limits_{m\to-\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=e$, (m מספר שלם שלילי).

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$, (x מספר ממשי חיובי).

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$, (x מספר ממשי שלילי).

---

[6] למרות ששלב זה מוצג כאן כשלב 6, הצגת המספר e כגבול של סדרה יכולה להיעשות בכל שלב אחר בתהליך. פעילות להצגת המספר e מוצעת בעמוד 444.

(5) $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$, (t מספר ממשי משני הצדדים של 0).

נראה תחילה ש- (1) גורר את (2). היות ו- m מספר שלם שלילי, ניתן לרשום $m=-n$, כאשר n מספר טבעי. אזי מתקיים:

$$\lim_{m\to-\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\underbrace{\frac{1}{n-1}}_{k}\right)^{n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)=e\cdot 1=e$$

בכך הוכח כי מ- (1) נובע (2).

נראה כי מ- (1) נובע (3). לשם כך נציין כי לכל $x\ge 1$ ממשי קיים n טבעי כך שמתקיים: $n\le x<n+1$ **.**

מכאן:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

כאשר x שואף לאינסוף, גם n שואף לאינסוף. על-פי (1) הביטויים באגף שמאל ובאגף ימין באי-שוויון לעיל שואפים למספר e. לכן, על-פי משפט הסנדוויץ' (עמוד 82), גם לביטוי שבמרכז האי-שוויון יש אותו גבול e, כלומר מתקיים (3).

באופן דומה ניתן להוכיח כי מ- (2) נובע (4). לבסוף, אם ב- (3) ו- (4) נסמן $\frac{1}{x}=t$, שני שוויונות אלה ביחד מביאים לשוויון (5).

מציאת נגזרת הפונקציה $y=\ln x$

נגזור את הפונקציה הלוגריתמית לפי הגדרת הנגזרת: $(\ln x)'=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h}$.

נעבד את הביטוי שבתוך הגבול:

$$\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}=\frac{1}{h}\cdot\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)=\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}=\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}\cdot\frac{1}{x}}=\ln\left(\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{1}{x}}$$

לפי חוקי הלוגריתמים

במקום לחלק ב- h נכפול בהופכי.

לפי חוקי הלוגריתמים

כפל וחילוק ב- x במעריך.

לפי חוקי החזקות

ניזכר ש- x נמצא בתחום של $\ln x$. לכן $x>0$. המספר h שואף לאפס משני צדדיו. לכן הוא שונה מ- 0, אבל יכול לקבל ערכים חיוביים ושליליים. נסמן $\frac{h}{x}=t$.

הראינו בעמוד הקודם כי $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$ ולכן: $\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\left(\frac{x}{h}\right)}=(1+t)^{\frac{1}{t}}$.

כאשר $h \to 0$, גם $t = \frac{h}{x} \to 0$, ולכן:

$$\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\left(\frac{x}{h}\right)} = (1+t)^{\frac{1}{t}} \xrightarrow[t\to 0]{} e \,.$$

נחזור לנגזרת הפונקציה $y = \ln x$.

כאשר $h \to 0$:

$$\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \ln\left(\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[h\to 0]{} \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

קיבלנו:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \,.$$

מציאת נגזרת הפונקציה $y = e^x$

נמצא עכשיו את נגזרת הפונקציה $y = e^x$ כנגזרת הפונקציה ההפוכה לפונקציה $y = \ln x$.

אם $f(x)$ ו- $g(x)$ שתי פונקציות הפוכות זו לזו, אז בין נגזרותיהן קיים הקשר הבא:

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

לפונקציות הנידונות $f(x) = \ln(x)$, $g(x) = e^x$, $f'(x) = \frac{1}{x}$ ו- $f'(g(x)) = \frac{1}{e^x}$.

מהקשר בין הנגזרות של פונקציות הפוכות המוצג לעיל נקבל:

$$\left(e^x\right)' = \frac{1}{\left(\frac{1}{e^x}\right)} = e^x$$

התוצאה שקיבלנו, הקובעת שנגזרת הפונקציה $y = e^x$ היא הפונקציה עצמה, מהווה, הוכחה לשקילות שתי ההגדרות למספר e.

מסלול ב: נקודת המוצא לדיון – החיפוש אחר הנגזרת של הפונקציה הלוגריתמית הכללית $y = \log_a x$

אחד המאפיינים הבולטים של מסלול זה הוא ההליכה מהכלל אל הפרט, מהנגזרת של משפחת הפונקציות הלוגריתמיות $y = \log_a x$ אל המקרה הפרטי $y = \ln x$. מהלך זה מחייב היכרות מוקדמת עם המספר e כגבול של סדרה, לשם פיתוח הנגזרת, אך מאפשר לדחות את חשיפת הקשר בין הסדרה שגבולה e לבין הנגזרת עד לעיצומו של תהליך פיתוח הנגזרת.

שלב 1: היכרות עם המספר e כגבול הסדרה $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$

אבן דרך זו הוצגה בעמוד 446.

שלב 2: מציאת הנגזרת של הפונקציה הלוגריתמית הכללית $y=\log_a x$

נפתח את נגזרת הפונקציה $y=\log_a x$ על-פי הגדרת הנגזרת:

$$\left(\log_a x\right)'=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a(x)}{h}$$

נשתמש בחוק הלוגריתמים השני ונקבל:

$$\left(\log_a x\right)'=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

נכפול ונחלק ב-x ונקבל:

$$\left(\log_a x\right)'=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\cdot\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

הגבול אינו תלוי ב-x, לכן נוכל להוציא את הגורם $\frac{1}{x}$ לפני הגבול ולהשתמש בחוק הלוגריתמים השלישי. נקבל:

$$\left(\log_a x\right)'=\frac{1}{x}\cdot\lim_{h\to 0}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\left(\frac{x}{h}\right)}$$

הפונקציה הלוגריתמית רציפה, לכן:

$$\left(\log_a x\right)'=\frac{1}{x}\cdot\log_a\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\left(\frac{x}{h}\right)}$$

כעת הגבול הנדרש: $\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\left(\frac{x}{h}\right)}$ מזכיר מאוד את הגבול שהגדיר את המספר e.

נסמן $\frac{h}{x}=t$ ונקבל:

$$\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\left(\frac{x}{h}\right)}=\left(1+t\right)^{\frac{1}{t}}.$$

נזכור כי גבול הביטוי $\left(1+t\right)^{\frac{1}{t}}$ כאשר $t\to 0$ אף הוא e.

כאשר h שואף לאפס, הביטוי $t=\frac{x}{h}$ שואף לאינסוף ולכן:

$$\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\left(\frac{x}{h}\right)}=\left(1+t\right)^{\frac{1}{t}}\xrightarrow[t\to 0]{}e$$

לכן:

$$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x}\cdot\log_a e = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln a}$$

שלב 3: מהנגזרת של הפונקציה $y=\log_a x$ אל המקרה הפרטי המיוחד

התבוננות בנגזרת מראה שכאשר $a=e$ מתקבלת נגזרת פשוטה במיוחד:

$$\left(\log_e x\right)' = \frac{1}{x}\cdot\log_e e = \frac{1}{x}$$

הלוגריתם בבסיס e נקרא בשם הלוגריתם הטבעי (natural logarithm) ונהוג לרשום אותו בכתיבה המקוצרת $\left(\log_e x\right)=\ln x$.

שלב 4: מנגזרת הפונקציה הלוגריתמית אל נגזרת הפונקציה המעריכית

במסלול א הצגנו פיתוח של נגזרת הפונקציה $y=e^x$ כפונקציה הפוכה לפונקציה $y=\ln x$.
אם בוחרים לצאת מהמקרה הכללי אל המקרה הפרטי, אפשר גם להציג את נגזרת הפונקציה $y=a^x$ כפונקציה הפוכה לפונקציה $y=\log_a x$. הנגזרת של פונקציה הפוכה הופכית לנגזרת של הפונקציה המקורית, כאשר בנגזרת זו המשתנה x מוחלף בפונקציה המקורית. בשלב זה ידוע כבר כי:

$$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln a}$$

מהקשר הנ"ל בין הנגזרות של פונקציות הפוכות זו לזו נקבל:

$$\left(a^x\right)' = \frac{1}{\frac{1}{a^x}\cdot\frac{1}{\ln a}} = a^x\ln a$$

שלב 5: מנגזרת הפונקציה המעריכית הכללית אל הנגזרת במקרה הפרטי $y=e^x$

במקרה הפרטי $a=e$ נקבל:

$$\left(e^x\right)' = e^x\ln e = e^x$$

נציין כי גם במסלול זה ניתן ורצוי לעסוק בקשרים שבין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת. ניתן לעשות זאת לפני הצגת הנגזרות, או לאחר מכן.

מסלול ג: נקודת המוצא לדיון – החיפוש אחר הנגזרת של הפונקציה המעריכית הכללית

במסלול זה הצגת הנגזרת של הפונקציה המעריכית מקדימה את הצגת הנגזרת של הפונקציה הלוגריתמית, כמו במסלול א. המספר e מוצג כגבול של סדרה אינסופית כמו במסלול ב.

שלב 1: הצגת המספר e, זהה לשלב 1 במסלול ב.

שלב 2: מציאת הנגזרת של הפונקציה המעריכית הכללית $y=a^x$ $\left(a>0, a\neq 1\right)$

נגזור את הפונקציה המעריכית לפי הגדרת הנגזרת:

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h-1)}{h}=a^x\lim_{h\to 0}\frac{(a^h-1)}{h}$$

ראינו קודם (עמוד 448) שהגבול $\lim_{h\to 0}\frac{(a^h-1)}{h}$ מבטא את ערך הנגזרת של הפונקציה a^x כאשר $x=0$. נוכיח כי הגבול הזה אכן קיים. לשם כך נסמן $a^h-1=t$. נשים לב כי כאשר $h\to 0$ גם $t\to 0$ וכי $h=\log_a\left(1+t\right)$.

לכן:

$$\frac{(a^h-1)}{h}=\frac{t}{\log_a\left(1+t\right)}=\frac{1}{\left(\frac{1}{t}\right)\log_a\left(1+t\right)}$$

$$=\frac{1}{\log_a\left(1+t\right)^{\left(\frac{1}{t}\right)}}$$

$\left(1+t\right)^{\frac{1}{t}}\to e$ כאשר $t\to 0$.

לכן כאשר: $h\to 0$, $\frac{(a^h-1)}{h}\to\frac{1}{\log_a e}=\log_e a=\ln a$.

בכך הוכח קיום הגבול

$$\lim_{h\to 0}\frac{(a^h-1)}{h}=\ln a$$

ולכן עבור כל x ממשי קיימת הנגזרת של a^x והיא:

$$\left(a^x\right)'=a^x\ln a.$$

שלב 3: הצגת נגזרת הפונקציה $y=e^x$ כמקרה פרטי זהה לשלב 5 במסלול ב.

להצגת נגזרת הפונקציה הלוגריתמית (שלבים 4 ו- 5), ניתן לבחור בין הדרך שהוצגה במסלול א לבין הדרך שהוצגה במסלול ב.

הערות

הגדרת המספר e כבסיס של פונקציה מעריכית שנגזרתה שווה לה, כרוכה בצורך להראות את השקילות בין הגדרה זו לבין הגדרת המספר e כגבול של סדרה. צורך זה נחסך בשני המסלולים האחרים בהם ההיכרות עם המספר e כבסיס של פונקציה מעריכית שנגזרתה שווה לה, מתקבלת כתוצאה של החיפוש אחר הנגזרת ולא על בסיס הגדרה. הצגת שקילות ההגדרות של המספר e מחייבת לחזור על חלק מאבני הדרך של המסלולים האחרים.

מצד שני, הליכה במסלול הראשון מצמיחה את המספר e ולא מצניחה אותו, וגם מאפשרת להציג את הנגזרות של הפונקציות המעריכות והלוגריתמיות בדרך פשוטה יחסית שאינה כרוכה בחישובי גבולות מסובכים או בטכניקה אלגברית מורכבת. הצגת שקילות ההגדרות של המספר e יכולה להתרחש בשלב מאוחר, לאחר שהתלמידים רכשו ידע, מיומנות וביטחון בכל הקשור לפונקציות המעריכות והלוגריתמיות.

הבחירה בין האפשרויות השונות להצגת הנגזרות של הפונקציות המעריכיות והלוגריתמיות כרוכה, כפי שראינו, בבחירה בין חלופות: בין הליכה מהכלל אל הפרט, להליכה מהמקרה הפרטי והפשוט אל הכללי והמורכב; בין נקודת מוצא גרפית ויזואלית, לבין נקודת מוצא אלגברית; בין שמירה על הסדר בו הוצגו הפונקציות, פונקציה מעריכית תחילה ואחר כך פונקציה לוגריתמית, לבין שינוי סדר זה משיקולים שונים; בין דרכים שונות להצגה ראשונה של המספר e. בחירות אלו קשורות באוכלוסיית הכיתה, בידע הקודם וביכולת של התלמידים וגם בטעם האישי ובהשקפת העולם של המורה.

בין השיקולים כדאי להביא בחשבון שהצגת הנגזרות של הפונקציות יכולה לזמן: לצד הכרת נגזרות חדשות גם מפגש מחודש עם מושג הנגזרת ועם הקשרים שבין הפונקציה לנגזרת; העלאה ובדיקה של השערות; מפגש עם הקשר בין נגזרות של פונקציות הפוכות זו לזו; עיסוק בגבולות; שימוש מורכב בטכניקה אלגברית. בכל אחת מן הדרכים נוכל להציג את הקיום של פונקציה, שנגזרתה שווה לה, כתופעה מתמטית מפליאה.

הפונקציה הנגזרת של פונקציית חזקה עם מעריך ממשי

השימוש בלוגריתמים מאפשר להרחיב את השימוש בנגזרת גם לפונקציות $y=x^{\alpha}$ בהן מעריך החזקה α הוא מספר אי-רציונלי, למשל, $\alpha=\pi$ או $\alpha=\sqrt{2}$. נציין כי פונקציית חזקה עם מעריך אי-רציונלי חיובי: $\alpha>0$ מוגדרת בתחום המספרים האי-שליליים $x\geq 0$, ופונקציית חזקה עם מעריך אי-רציונאלי שלילי: $\alpha<0$ בתחום המספרים החיוביים $x>0$.

כדי למצוא את הנגזרת y' של $y=x^{\alpha}$, נפעיל את פעולת הלוגריתם הטבעי בשני צדדי התבנית של הפונקציה:

$$y=x^{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \ln y=\alpha \ln x$$

התקבלה משוואה בשני נעלמים אשר מגדירה את פונקציית החזקה כפונקציה סתומה. בהתאם לכלל מציאת הנגזרת של פונקציה סתומה, ועל סמך הנוסחה $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ מוצאים:

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\alpha\cdot\frac{1}{x} \ \Rightarrow$$

$$y'=y\alpha\frac{1}{x}=x^{\alpha}\alpha\frac{1}{x}=\alpha x^{\alpha-1}$$

בכך התקבלה נוסחה אחידה לנגזרת פונקציית חזקה עם מעריך ממשי α כלשהו:

$$\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha x^{\alpha-1}$$

נציין כי הנוסחה תקפה לכל ערך ממשי של x עבורו מוגדרים שני אגפיה.

דוגמאות לגזירת פונקציית חזקה עם מעריך ממשי כלשהו

$$(1)\ \left(x^{100}\right)'=100x^{99},\ \ x\in\mathbb{R}, \qquad (2)\ \left(x^{\frac{4}{3}}\right)'=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}},\ \ x\in\mathbb{R}, \qquad (3)\ \left(x^{-\frac{5}{2}}\right)'=-\frac{5}{2}x^{-\frac{7}{2}},\ \ x>0$$

$$(4)\ \left(x^{\sqrt{2}}\right)'=\sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1},\ \ x\geq 0 \qquad (5)\ \left(x^{-\frac{1}{\pi}}\right)'=-\frac{1}{\pi}x^{-\frac{1}{\pi}-1},\ \ x>0$$

הפונקציה הנגזרת של פונקציה מהצורה $y=\left(f\left(x\right)\right)^{g(x)}$

לפונקציה $y=\left(f\left(x\right)\right)^{g(x)}$ יש x בבסיס כמו לפונקציית חזקה, ו- x במעריך כמו לפונקציה מעריכית. ניתן לומר שהיא מהווה סוג של תערובת של שתי פונקציות אלה. היא אינה שייכת למשפחת הפונקציות המעריכיות, אינה שייכת למשפחת פונקציות החזקה, ואף אינה פונקציה מורכבת שלהן.
כדי לגזור פונקציות אלה משתמשים בחוקי הלוגריתמים ובנגזרת של פונקציה סתומה.
נניח כי כל אחת מהפונקציות $f\left(x\right)$, $g\left(x\right)$ רציפה בתחום שלה. אזי הפונקציה $y=\left(f\left(x\right)\right)^{g(x)}$ מוגדרת ורציפה בתחום D $\{g(x)$ מוגדרת, $f(x)$ מוגדרת וחיובית $D=\{x;$.
מהביטוי $y=\left(f\left(x\right)\right)^{g(x)}$ עבור ערך y של הפונקציה הנתונה, נובע כי:

$$\ln y=g\left(x\right)\ln f\left(x\right) \text{ לכל } x\in D.$$

התקבלה משוואה אשר מגדירה את הפונקציה הנתונה כפונקציה סתומה. את נגזרתה y' ניתן למצוא על-ידי גזירת שני אגפי המשוואה לפי x, תוך שימוש בכלל השרשרת:

$$\frac{1}{y}y'=\left(g\left(x\right)\ln f\left(x\right)\right)'=g'\left(x\right)\ln f\left(x\right)+g\left(x\right)\frac{1}{f\left(x\right)}\cdot f'\left(x\right)\Rightarrow$$

$$y'=\underbrace{f\left(x\right)^{g(x)}}_{y}\left(g'\left(x\right)\ln f\left(x\right)+g\left(x\right)\frac{1}{f\left(x\right)}\cdot f'\left(x\right)\right)$$

$$=f\left(x\right)^{g(x)}\ln f\left(x\right)g'\left(x\right)+g\left(x\right)\cdot f\left(x\right)^{g(x)-1}f'\left(x\right)$$

בכך התקבלה נוסחה כללית למציאת הנגזרת של הפונקציה $f\left(x\right)^{g(x)}$:

$$\left(f\left(x\right)^{g(x)}\right)'=g\left(x\right)\cdot f\left(x\right)^{g(x)-1}f'\left(x\right)+f\left(x\right)^{g(x)}\cdot\ln f\left(x\right)\cdot g'\left(x\right). \qquad (*)$$

הערה

כאשר מתבוננים בביטוי שבאגף הימין של הנוסחה (*), רואים כי הביטוי הוא סכום של שני מחוברים. המחובר הראשון הוא הנגזרת של הפונקציה $f\left(x\right)^{g(x)}$, הנתפשת כפונקציית חזקה מורכבת עם בסיס פונקציונאלי $f\left(x\right)$ ומעריך "כאילו קבוע" $g\left(x\right)$, והמחובר השני הוא הנגזרת של הפונקציה $f\left(x\right)^{g(x)}$ הנתפשת כפונקציה מעריכית מורכבת עם בסיס "כאילו קבוע" $f\left(x\right)$ ומעריך פונקציונאלי $g\left(x\right)$. כל פעם הגזירה מתבצעת על-פי כלל השרשרת.
במקרים קונקרטיים כאשר יש למצוא נגזרת של פונקציה מהצורה $f\left(x\right)^{g(x)}$, ניתן להשתמש בנוסחה (*) או לשחזר את התהליך שהביא לנוסחה זו. הדוגמאות להלן מדגימות את שתי הדרכים האלה.

דוגמאות למציאת הנגזרת של פונקציה $y=\left(f\left(x\right)\right)^{g(x)}$

דוגמה 1

נתונה פונקציה $y=\left(x^2+1\right)^{(2x-1)}$. מצאו את תחום ההגדרה והנגזרת של פונקציה זו.

פתרון

כל אחת מהפונקציות $f\left(x\right)=x^2+1,\ \ g\left(x\right)=2x-1$ מוגדרת, רציפה וגזירה לכל $x\in\mathbb{R}$. בנוסף, $f\left(x\right)>0$ לכל $x\in\mathbb{R}$. לכן הפונקציה הנתונה מוגדרת, רציפה וגזירה בכל נקודה $x\in\mathbb{R}$.

כדי למצוא פונקציה נגזרת לפונקציה נתונה, ניישם את התהליך שהוצג לעיל:

$$\begin{aligned}
&y=\left(x^2+1\right)^{(2x-1)}\Rightarrow \ln y=\left(2x-1\right)\ln\left(x^2+1\right)\\
&\Rightarrow \frac{1}{y}y'=2\ln\left(x^2+1\right)+\left(2x-1\right)\frac{1}{x^2+1}2x\\
&\Rightarrow y'=y\left(2\ln\left(x^2+1\right)+\frac{2x\left(2x-1\right)}{x^2+1}\right)\\
&=\left(x^2+1\right)^{(2x-1)}\left(2\ln\left(x^2+1\right)+\frac{2x\left(2x-1\right)}{x^2+1}\right)\\
&=2\left(x^2+1\right)^{(2x-1)}\ln\left(x^2+1\right)+2x\left(2x-1\right)\left(x^2+1\right)^{(2x-2)}
\end{aligned}$$

הקוראים מתבקשים לבדוק שגזירה מידית לפי הנוסחה (*) מביאה לאותה תוצאה.

דוגמה 2

מצאו את תחום ההגדרה ואת הנגזרת של הפונקציה $y=x^x$.

פתרון

תחום ההגדרה של הפונקציה $y=x^x$ הוא: $0<x<\infty$. בתחום זה על-פי הנוסחה (*) מוצאים:

$$y'=\left(x^x\right)'=x\cdot x^{x-1}+x^x\cdot\ln x=x^x\left(1+\ln x\right)$$

הקוראים מתבקשים לבדוק כי התהליך של הפעלת לוגריתם על שני אגפיה של תבנית המוצא, והתהליך של מציאת הנגזרת של פונקציה סתומה, מביאים לאותה תוצאה.

דוגמה 3

מצאו את תחום ההגדרה והנגזרת של הפונקציה $y=\left(x-1\right)^{\ln x}$.

פתרון

תחום ההגדרה של הפונקציה $y=\left(x-1\right)^{\ln x}$ הוא: $1<x<\infty$. בתחום זה על-פי הנוסחה (*) מוצאים:

$$y'=\ln x\cdot\left(x-1\right)^{\ln x-1}+\left(x-1\right)^{\ln x}\cdot\ln\left(x-1\right)\cdot\frac{1}{x}=\left(x-1\right)^{\ln x}\left(\frac{\ln x}{x-1}+\frac{\ln(x-1)}{x}\right)$$

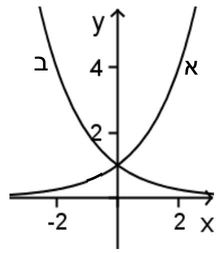
אסימפטוטות של פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

לפונקציות המעריכיות: $f(x)=a^x$ יש אסימפטוטה אופקית: $y=0$ ואין אסימפטוטה אנכית.

אם $a>1$ (איור 15א) הגרף $y=a^x$ מתקרב לאסימפטוטה בקרן השמאלית של ציר ה- x, ואם $0<a<1$ (איור 15א) - בקרן הימנית של ציר ה-x.

עובדות אלו נובעות מהגבולות הבאים:

$$0<a<1\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} a^x=0\end{cases} \qquad ,a>1\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty\end{cases}$$



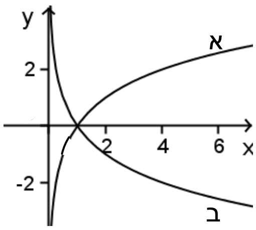
איור 15א

לפונקציות הלוגריתמיות: $f(x)=\log_a x$ יש אסימפטוטה אנכית $x=0$ ואין אסימפטוטה אופקית.

אם $a>1$ הגרף $y=\log_a x$ מתקרב לאסימפטוטה ברביע הרביעי (איור 15ב), ואם $0<a<1$ ברביע הראשון (איור 15ב).

מצב זה מתבסס על הגבולות:

$$0<a<1\Rightarrow \lim_{x\to0^+}\log_a x=+\infty \quad ,a>1\Rightarrow \lim_{x\to0^+}\log_a x=-\infty$$



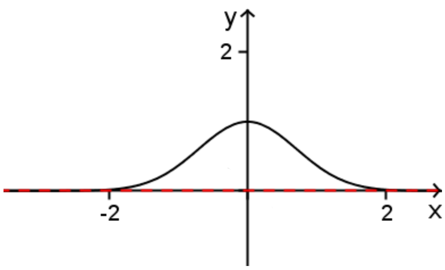
איור 15ב

גם בהמשך חיפוש האסימפטוטות של פונקציות בהן יופיעו הפונקציות המעריכיות והלוגריתמיות (יחד עם פונקציות אחרות) יתבסס על חישוב גבולות.

להלן מספר דוגמאות המדגימות דרכים טיפוסיות למציאת אסימפטוטות של פונקציות המשלבות פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות.

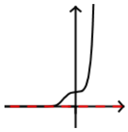
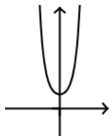
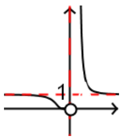
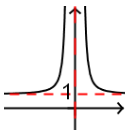
דוגמה 1 – אסימפטוטות של הרכבות פונקציה מעריכית על פונקציות חזקה עם מעריך שלם – בחינת ההתנהגות של מעריך החזקה

נתבונן תחילה בפונקציה $f(x)=e^{\left(-x^2\right)}$. הפונקציה מוגדרת לכל x. אין לה אסימפטוטה אנכית. למציאת אסימפטוטה אופקית יש לבחון את גבול הפונקציות כאשר x שואף ל- ∞, וכאשר הוא שואף ל-$(-\infty)$. כיוון שהמעריך של הפונקציה הוא פונקציה ריבועית בעלת מקסימום, הרי שקיים: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-x^2\right)=-\infty$, ולכן, על-פי הגבול $\lim\limits_{x\to(-\infty)} e^x=0$, מתקבל: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{\left(-x^2\right)}=0$, כלומר, הישר $y=0$ הוא אסימפטוטה אופקית לפונקציה $f(x)=e^{\left(-x^2\right)}$ בשני הכיוונים של ציר המספרים. באופן דומה ניתן לנתח את ההתנהגות של פונקציות נוספות המתקבלות מהרכבה של פונקציה מעריכית על פונקציית חזקה עם מעריך שלם. דוגמאות אופייניות נוספות מוצגות בטבלה 9 .



איור 16

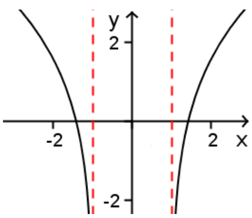
הקוראים מוזמנים לבדוק את הטיעונים ואת התמונות על סמך חישוב גבולות מתאימים.

פונקציה	אסימפטוטות	תמונה גרפית
$e^{\left(x^n\right)}$ כאשר n מספר שלם אי-זוגי	אסימפטוטה אופקית ב-$\left(-\infty\right)$: $y=0$	
$e^{\left(x^n\right)}$ כאשר n מספר שלם זוגי	אין אסימפטוטות	
$e^{\frac{1}{x^n}}$ כאשר n מספר שלם אי-זוגי	אסימפטוטה אופקית $y=1$ ב-∞ וב-$\left(-\infty\right)$. אסימפטוטה אנכית חד-צדדית $x=0$	
$e^{\frac{1}{x^n}}$ כאשר n מספר שלם זוגי	אסימפטוטה אופקית $y=1$ ב-∞ וב-$\left(-\infty\right)$. אסימפטוטה אנכית דו-צדדית $x=0$	

טבלה 9: אסימפטוטות של הפונקציות $e^{\left(x^n\right)}$ ו- $e^{\frac{1}{x^n}}$ $n\in\mathbb{N}$

דוגמה 2 – בחינת ההתנהגות של הפונקציה הפנימית בפונקציה לוגריתמית מורכבת: $f(x)=\log_2(x^2-4)$

הפונקציה הנתונה מוגדרת בתחום: $x<-2\vee x>2$ בו $x^2-4>0$. הפונקציה הפנימית x^2-4 היא פונקציה ריבועית בעלת מינימום. ערכיה שואפים לאינסוף כאשר $x\to\pm\infty$, על-כן, היות ולפונקציה $\log_2 x$ אין אסימפטוטה אופקית או משופעת כאשר $x\to\infty$, לפונקציה $f(x)=\log_2(x^2-4)$ אין אסימפטוטה אופקית או משופעת כאשר $x\to\pm\infty$.



איור 17

הפונקציה x^2-4 מתאפסת ב- $x=2$ וב- $x=-2$. ערכיה חיוביים מימין ל- $x=2$ ומשמאל ל- $x=-2$. מכאן שהישרים: $x=2$ ו- $x=-2$ הם אסימפטוטות אנכיות של $f(x)$, כפי שהישר $x=0$ הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה $\log_2 x$.

נציין עוד כי היות והפונקציה הפנימית x^2-4 היא פונקציה זוגית, גם הפונקציה $f(x)=\log_2(x^2-4)$ היא פונקציה זוגית. הגרף באיור 17 משקף תכונה זו של $f(x)$ ואת שאר תכונותיה.

דוגמה 3 – חישוב גבולות של הרכבת פונקציה רציונלית על פונקציה מעריכית e^x בדומה לחישוב גבולות של מנת פולינומים

נתבונן בפונקציה: $f(x)=\frac{2e^x+5}{e^{2x}-e^x-2}$.

פונקציה זו היא הרכבת פונקציה רציונלית $\frac{2x+5}{x^2-x-2}$ על הפונקציה e^x.

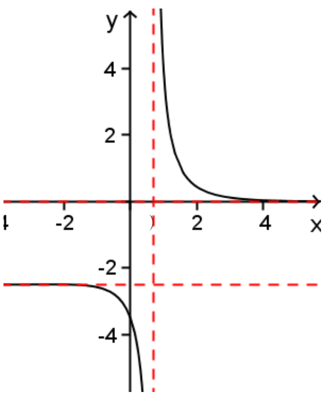
מציאת אסימפטוטה אנכית:

נפרק את המכנה לגורמים: $f(x)=\frac{2e^x+5}{(e^x-2)(e^x+1)}$.

תחום ההגדרה של הפונקציה הוא: $x\neq\ln 2$.

כיוון שהמונה לא מתאפס עבור $x=\ln 2$, הרי שהישר $x=\ln 2$ הוא אסימפטוטה אנכית לפונקציה $f(x)$.

שיקולים במציאת הגבולות האינסופיים המתאימים:



איור 18

הגורמים: $2e^x+5$ ו- e^x+1 חיוביים לכל x. לכן סימנם של ערכי הפונקציה הנתונה $f(x)$ נקבעים על-פי סימנו של הגורם: e^x-2. כשם שהפונקציה e^x מונוטונית עולה, כך גם e^x-2. לכן הפונקציה שלילית משמאל לנקודה $x=\ln 2$ וחיובית מימין לה.

נוכל להסיק:

$$\lim_{x\to(\ln 2)^+}\frac{2e^x+5}{(e^x-2)(e^x+1)}=+\infty\ ,\ \lim_{x\to(\ln 2)^-}\frac{2e^x+5}{(e^x-2)(e^x+1)}=-\infty\ .$$

למציאת אסימפטוטה אופקית של $f(x)$ עלינו לחשב את הגבולות:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^x+5}{e^{2x}-e^x-2} \text{ -ו } \lim_{x\to-\infty}\frac{2e^x+5}{e^{2x}-e^x-2}$$

ניעזר בתכונות של e^x: $\lim_{x\to+\infty}\left(e^x\right)=+\infty$ ו- $\lim_{x\to-\infty}\left(e^x\right)=0$.

בשבר $\frac{2e^x+5}{e^{2x}-e^x-2}$ המונה והמכנה שואפים לאינסוף כאשר $x\to\infty$. נוכל לחשב את הגבול של שבר זה בדיוק כפי שחישבנו גבולות של פונקציות רציונאליות, על-ידי הוצאת החזקה המובילה במכנה ובמונה מחוץ לסוגריים, כמודגם להלן:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^x+5}{e^{2x}-e^x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(2+\frac{5}{e^x}\right)}{e^{2x}\left(1-\frac{1}{e^x}-\frac{2}{e^{2x}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}\cdot\frac{\left(2+\frac{5}{e^x}\right)}{\left(1-\frac{1}{e^x}-\frac{2}{e^{2x}}\right)}$$

כיוון ש- $\frac{1}{e^x}\xrightarrow[x\to\infty]{}0$, וגם: $\frac{1}{e^{2x}}\xrightarrow[x\to\infty]{}0$, הרי שערכו של הגבול המבוקש הוא: $0\cdot\frac{2}{1}=0$. ומכאן הישר $y=0$ הוא אסימפטוטה אופקית של $f(x)$ כאשר $x\to\infty$.

כיוון ש- $\lim_{x\to-\infty}\frac{2e^x+5}{e^{2x}-e^x-2}=\frac{0+5}{0-2}=-2.5$, הישר $y=-2.5$ הוא אסימפטוטה אופקית של $f(x)$ כאשר $x\to-\infty$.

הגרף $y=\frac{2e^x+5}{e^{2x}-e^x-2}$ מוצג באיור 18.

דוגמה 4 – חישוב גבולות של הרכבת פונקציה רציונלית על פונקציה לוגריתמית $\ln x$ כגבולות של מנת פולינומים

נתבון בפונקציה: $f(x)=\dfrac{2(\ln x)^2+5}{(\ln x)^2-\ln x-2}$.

פונקציה זו היא הרכבת פונקציה רציונלית $\dfrac{2x^2+5}{x^2-x-2}$, שהיא מנת הפולינומים ממעלה שנייה, על הפונקציה $\ln x$.

נסמן $\ln x=t$ ונרשום:

$$f(x)=\frac{2(\ln x)^2+5}{(\ln x)^2-\ln x-2}\overset{t=\ln x}{=}\frac{2t^2+5}{t^2-t-2}=\frac{2t^2+5}{(t-2)(t+1)}=\frac{2\ln^2 x+5}{(\ln x-2)(\ln x+1)}.$$

מכאן נקבל:

תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ הוא: $x>0$ וגם: $x\neq\dfrac{1}{e}$, $x\neq e^2$ (מדוע?).

אם $x\to\infty$ אז גם $t=\ln x\to\infty$. מנת המקדמים של החזקות המובילות במנת הפולינומים $\dfrac{2t^2+5}{t^2-t-2}$ היא 2, ולכן עבור $t\to\infty$ הגבול של מנת הפולינומים הוא 2. מכאן הישר $y=2$ הוא אסימפטוטה אופקית של $f(x)$ כאשר $x\to\infty$.

נחקור את התנהגות של $f(x)$ כאשר x שואף לקצה השמאלי של תחום ההגדרה של $f(x)$, כלומר, $x\to 0^+$.

במקרה זה $t=\ln x\to(-\infty)$ ולכן:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{t\to(-\infty)}\frac{2t^2+5}{t^2-t-2}=\lim_{t\to(-\infty)}\frac{t^2\left(2+\frac{5}{t^2}\right)}{t^2\left(1-\frac{1}{t}-\frac{2}{t^2}\right)}=\lim_{t\to(-\infty)}\frac{2+\frac{5}{t^2}}{1-\frac{1}{t}-\frac{2}{t^2}}=2$$

מכאן מסיקים שהנקודה $x=0$ היא נקודת אי-רציפות סליקה של $f(x)$ והנקודה $(0,2)$ היא נקודת "חור" בגרף $y=f(x)$. בנקודה זו אין אסימפטוטה אנכית ל- $f(x)$.

נבדוק אם קיימות אסימפטוטות האנכיות בנקודות $x=\dfrac{1}{e}$ ו- $x=e^2$. בשתי הנקודות האלה המונה של השבר $f(x)=\dfrac{2(\ln x)^2+5}{(\ln x)^2-\ln x-2}$ לא מתאפס והמכנה מתאפס. מכאן נוכל להסיק שקיימות לפונקציה $f(x)$ אסימפטוטות אנכיות $x=\dfrac{1}{e}$ ו- $x=e^2$.

בדיקת התנהגות הפונקציה $f(x)$ ליד האסימפטוטות האנכיות מצריכה חישוב גבולות חד-צדדיים של $f(x)$ בנקודות $x=\dfrac{1}{e}$ ו- $x=e^2$. או לפחות בדיקת תחומי החיוביות והשליליות של פונקציה זו.

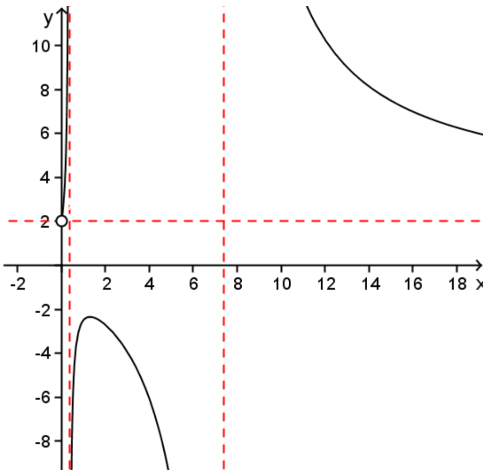
בחישוב גבולות מקבלים:

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{e}\right)^+}\frac{2(\ln x)^2+5}{(\ln x-2)(\ln x+1)}=-\infty$$

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{e}\right)^-}\frac{2(\ln x)^2+5}{(\ln x-2)(\ln x+1)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to\left(e^2\right)^+}\frac{2(\ln x)^2+5}{(\ln x-2)(\ln x+1)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to\left(e^2\right)^-}\frac{2(\ln x)^2+5}{(\ln x-2)(\ln x+1)}=-\infty$$



איור 19

איור 19 מציג באופן ויזואלי את כל תוצאות החקירה.

דוגמה 5 - מציאת אסימפטוטה משופעת על-ידי שינוי מתאים של צורת תבנית הפונקציה

תהי נתונה הפונקציה: $y=\frac{xe^x}{e^x+1}+1$. נציג אותה בצורה: $y=x\cdot\frac{e^x}{e^x+1}+1$.

נחלק את מונה השבר במכנה באופן הבא:

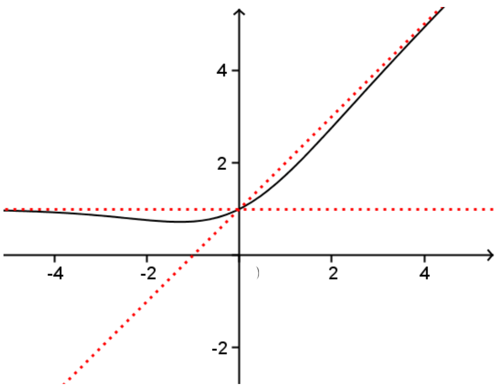
$$\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{\left(e^x+1\right)-1}{e^x+1}=1-\frac{1}{e^x+1}$$

מכאן מקבלים:

$$y=x+1-\frac{x}{e^x+1}\ .$$

כאשר $x\to\infty$, השבר $\frac{x}{e^x+1}$ שואף לאפס (מדוע?), ולכן גרף הפונקציה הולך ומתקרב אל הישר $y=x+1$.

ישר זה הוא האסימפטוטה המשופעת של הפונקציה הנתונה עבור $x\to\infty$.



איור 20

כאשר $x\to-\infty$,המכפלה xe^x שואפת לאפס (מדוע?), ולכן:

$\frac{xe^x}{e^x+1}+1\xrightarrow[x\to(-\infty)]{}1$ מכאן, הישר $y=1$ הוא אסימפטוטה אופקית של הפונקציה הנתונה בכיוון השלילי של ציר ה- x . הגרף של הפונקציה מוצג באיור 20.

הערה

בדוגמה 5 נתקלנו בצורך לדעת מהם ערכי גבולות: $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x+1}$ ו- $\lim_{x\to(-\infty)}xe^x$. ניתן לקבל תשובה לשאלה זו על סמך שיקולים איכותניים והערכות נומריות. לפעמים גם אמצעים כאלה אינם מספיקים.

דוגמה 6 - נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x-1}{\ln x}$, ויש למצוא את כל האסימפטוטות שלה, אם יש כאלה.

הפונקציה מוגדרת עבור $1 \neq x > 0$.

נבדוק את ההתנהגות של הפונקציה הנתונה כאשר $x \to 0^+$, $x \to 1$ ו- $x \to \infty$.

כאשר $x \to 0^+$ המונה של השבר $\frac{x-1}{\ln x}$ שואף ל- (-1), והמכנה שואף ל- $(-\infty)$ ולכן: $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x-1}{\ln x}=0$, כלומר, אין לפונקציה אסימפטוטה אנכית ב- $x=0$, אלא "חור" בנקודה (0,0). בהמשך הפרק נביא דוגמאות לחקירות מלאות של פונקציות, ונדון גם בפונקציות עם "חורים".

בחישוב הגבול: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}$, נתקלים במצב כאשר המונה והמכנה שואפים שניהם ל- 0. לצורך חישובם לא ניתן להפעיל אותם השיקולים שהופעלו בדוגמאות קודמות. חישוב גבולות כאלה מתבצע באמצעות כלל לופיטל.

משפט (כלל לופיטל[7])

יהיו $f(x)$ ו- $g(x)$ שתי פונקציות אשר מוגדרות, רציפות וגזירות בסביבת נקודה $x=x_0$, למעט אולי נקודה זו ו- $g'(x)\neq 0$ כאשר $x\to x_0$. אם

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0$$

או

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=(\pm)\infty$$

אזי

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

במקרה והגבול האחרון של מנת הנגזרות קיים.

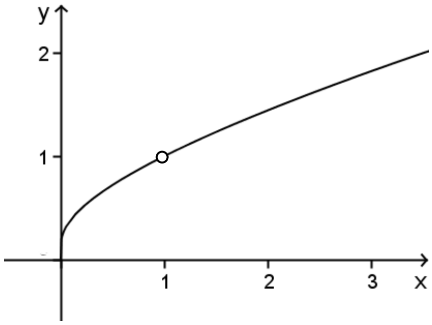
הערות

1. המשפט נכון גם כאשר תנאיו מתקיימים בסביבה חד-צדדית של הנקודה $x=x_0$ ומחפשים גבול חד-צדדי.
2. המשפט נכון גם כאשר מדובר בגבולות במובן הרחב – גבולות אינסופיים.
3. המשפט נכון גם כאשר מחפשים גבולות באינסוף, כלומר, גבולות $x\to\infty$ או $x\to(-\infty)$. במקרים כאלה יש לדרוש את קיום תנאי המשפט בתחום $x>A>0$ (סביבת אינסוף) או בתחום $x<B<0$ (סביבת מינוס אינסוף).
4. המצבים כאשר מונה ומכנה של השבר שואפים בו-זמנית לאפס או לאינסוף עם סימן כלשהו (לא בהכרח של אותו סימן במונה ובמכנה) - מצבים כאלה מסומנים בצורה סימבולית כ- "$\frac{0}{0}$" ו- "$\frac{\infty}{\infty}$" ונקראים "מצבי אי-וודאות", היות והתשובה לגבי ערך הגבול במצבים כאלה אינה מתקבלת מידית אלא לאחר חקירה נוספת. לעומת זאת המצבים "$\frac{0}{\infty}$" או "$\frac{\infty}{0}$" הם מצבים של וודאות, היות ובהם ניתן להסיק מידית כי לגבול יש ערך 0 או אינסוף, בהתאמה.

[7] ההוכחה בעמוד 608.

נחזור אל חישובי הגבולות עבור הפונקציה שלנו, $f(x)=\frac{x-1}{\ln x}$.

על-פי כלל לופיטל נקבל: $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)}=1$, כך שגם בנקודה $x=1$ אין לפונקציה אסימפטוטה אנכית



איור 21

אלא יש אי-רציפות סליקה, המוצגת באופן ויזואלי על-ידי "חור" בגרף בנקודה (1,1), (איור 21).

נחפש אסימפטוטה אופקית על-ידי חישוב הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-1}{\ln x}$. המונה והמכנה של השבר $\frac{x-1}{\ln x}$ שואפים לאינסוף כאשר $x\to\infty$. זה מצב אי-וודאות מהצורה: $\frac{\infty}{\infty}$. כלל לופיטל תומך גם בחישוב גבול זה. על-פיו נקבל: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-1}{\ln x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty$, כלומר, לפונקציה אין גם אסימפטוטה אופקית. היות ו- $f'(x)=\left(\frac{x-1}{\ln x}\right)'=\frac{\ln x-\frac{x-1}{x}}{\ln^2 x}\xrightarrow[x\to\infty]{}0$, לפונקציה $f(x)$ אין גם אסימפטוטה משופעת. מכאן שלפונקציה $f(x)=\frac{x-1}{\ln x}$ אין אף אסימפטוטה.

דוגמה 7 - נתונה פונקציה: $f(x)=\frac{x}{e^x}$ ויש למצוא את כל האסימפטוטות שלה

הפונקציה מוגדרת ורציפה לכל x ממשי. לכן אין לה אסימפטוטות אנכיות.

בחיפוש אסימפטוטה בכיוון השלילי של ציר x יש לחשב גבול: $\lim\limits_{x\to(-\infty)}f(x)=\lim\limits_{x\to(-\infty)}\frac{x}{e^x}$.

המונה שואף ל- $(-\infty)$ והמכנה שואף ל- 0 בהישארו מספר חיובי. במצב זה ניתן להסיק מידית שהשבר שואף ל- $(-\infty)$. לתשובה זו ניתן להגיע גם בדרך אחרת:

$$\lim_{x\to(-\infty)}f(x)=\lim_{x\to(-\infty)}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to(-\infty)}x\cdot e^{-x}=-\infty$$

התשובה $(-\infty)$ התקבלה כי במכפלה xe^{-x} הגורם הראשון x שואף ל-$(-\infty)$ והגורם השני e^{-x} שואף ל- ∞.

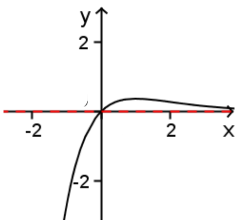
מהתוצאה $\lim\limits_{x\to(-\infty)}f(x)=-\infty$ נובע כי לפונקציה הנתונה אין אסימפטוטה אופקית כאשר $x\to(-\infty)$. היות ו- $y'=f'(x)=\frac{e^x-xe^x}{e^{2x}}=\frac{1-x}{e^x}=(1-x)e^{-x}\xrightarrow[x\to(-\infty)]{}\infty$, לפונקציה הנתונה לא קיימת גם אסימפטוטה משופעת כאשר $x\to(-\infty)$ (מדוע?). בכך, לפונקציה $f(x)=\frac{x}{e^x}$ אין אף אסימפטוטה בכיוון השלילי של ציר x ,

במציאת אסימפטוטה בכיוון החיובי של ציר x מתקבל גבול מהצורה "$\frac{\infty}{\infty}$", לכן נשתמש בכלל לופיטל:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

מתוצאה זו נובע שציר ה- x הוא אסימפטוטה אופקית של הפונקציה $f(x)=\frac{x}{e^x}$ בקרן הימנית שלו.

הגרף $y=\frac{x}{e^x}$ מוצג באיור 22.



איור 22

נציין כי שימוש מוטעה בכלל לופיטל במצבי וודאות כגון "$\frac{\infty}{0}$" או "$\frac{0}{\infty}$" עלול להביא לתשובה שגויה. למשל, אילו בדוגמה לעיל היינו משתמשים בכלל לופיטל לחישוב הגבול $\lim_{x\to(-\infty)} \frac{x}{e^x}$ היינו מגיעים לתשובה ∞ כאשר התשובה הנכונה היא $(-\infty)$.

הערות דידקטיות

1. כאשר אין בידי התלמידים כלים לחישוב גבולות אין הם נדרשים למצוא את האסימפטוטות בדרך אנליטית. בדרך כלל, ניתן לשער על-פי תכונות הפונקציה את קיומה של אסימפטוטה ולמצוא אותה, לפחות בקירוב, על-ידי הצבת ערכי x מתאימים בתבנית של הפונקציה.
2. נציין עוד שניתן לומר: "אסימפטוטה של פונקציה" וגם "אסימפטוטה של הגרף", אבל לא ניתן לומר: "פונקציה מתקרבת לאסימפטוטה" אלא רק: "גרף הפונקציה מתקרב לאסימפטוטה".

נמשיך לעסוק במציאת אסימפטוטות לפונקציות מעריכיות ולוגריתמיות בהמשך, כחלק מחקירת פונקציות.

חקירת פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

פעילויות החקירה בסעיף זה בנויות באופן המאפשר לחזור אל הידע שהתלמידים רכשו במשך שנות לימודי האנליזה. בפרט, יש בפרק חקירות מתפתחות של מקבצי פונקציות מעריכיות ו/או לוגריתמיות המאפשרות להצמיח כל חקירה מתוך החקירה שקדמה לה. חלק מן הפעילויות מציגות זו לצד זו פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות, במטרה להשוות ביניהן או להבליט תכונות של הפונקציות.

פעילות 5: הרכבה של פונקציה מעריכית על פונקציות אחרות

בפעילות זו מוצגת חקירה מתפתחת המזמנת, לצד העיסוק בפונקציות מעריכיות, מבט מחודש על פעולת ההרכבה, ועל ביטוין של הפונקציות הפנימיות בפונקציה המורכבת.

1. נקודת מוצא לחקירה – הפונקציה $y=e^{x^2+1}$

א. מצאו נקודות קיצון ונקודות פיתול של הפונקציה $y=e^{x^2+1}$ וסרטטו את גרף הפונקציה.

ב. האם יש לפונקציה אסימפטוטות?

אבני דרך בפתרון

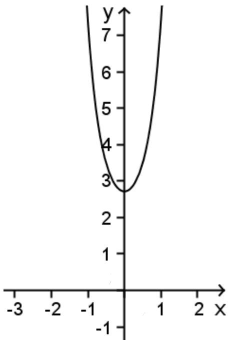
$y'=2x\cdot e^{x^2+1}$ $\Leftarrow$ לנגזרת נקודות אפס אחת $x=0$.

הנגזרת שלילית כאשר $x<0$ וחיובית כאשר $x>0$.

לפונקציה נקודת מינימום $(0,\ e)$.

$y''=2\cdot e^{x^2+1}+4x^2\cdot e^{x^2+1}$ $\Leftarrow$ הנגזרת השנייה חיובית בכל התחום.

הפונקציה קעורה כלפי מעלה בכל התחום ואין לה נקודות פיתול.



איור 23

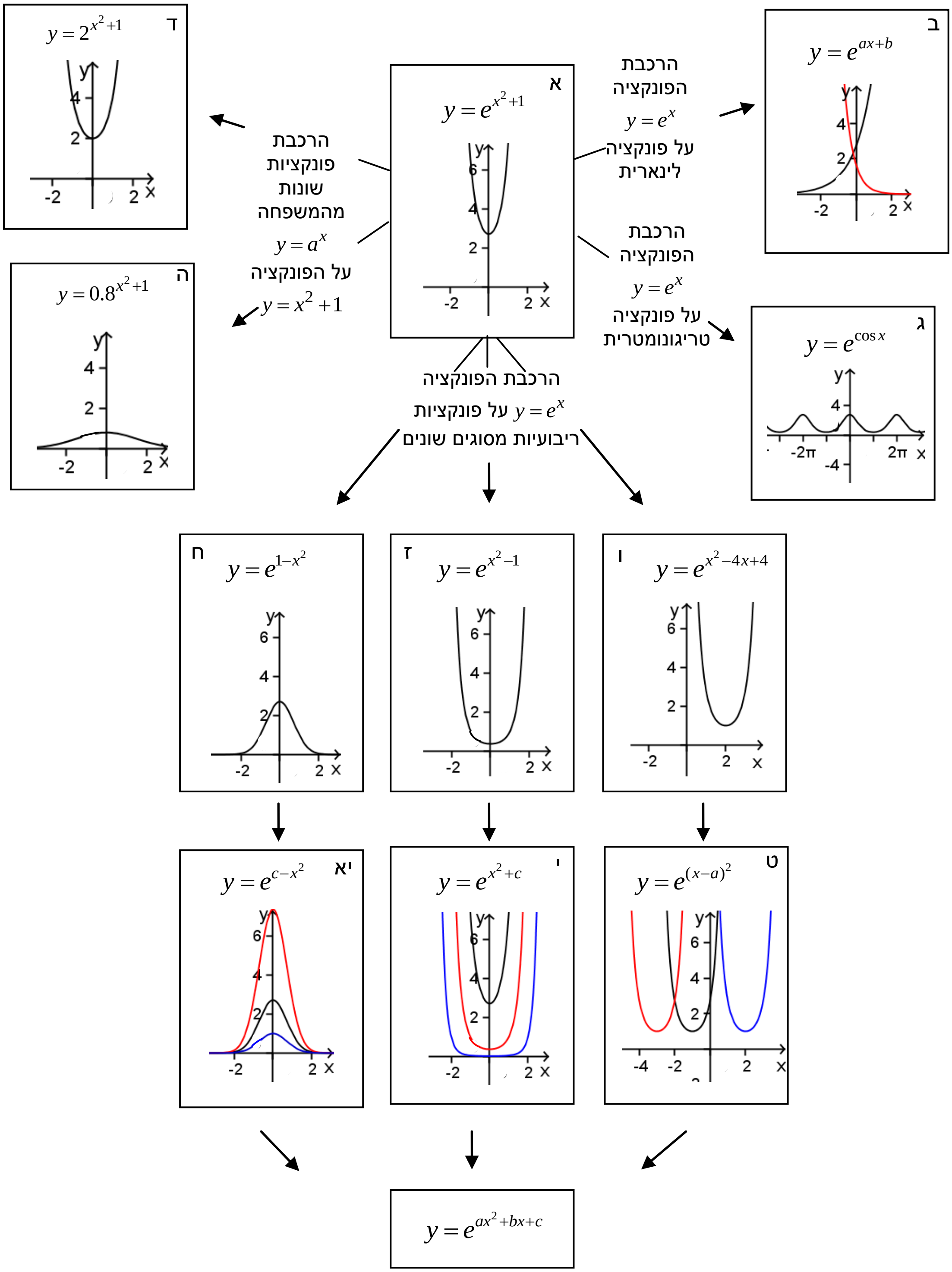
כיוון שהפונקציה מוגדרת ב- $\mathbb{R}$ אין לה אסימפטוטות מאונכות. קל לראות שאין לה גם אסימפטוטות אופקיות או משופעות.
גרף סכמתי מוצג באיור 23.

2. לאן נוכל למנף את המשימה?

פתחנו בשאלה על הרכבת פונקציה מעריכית על פונקציה ריבועית זוגית, אשר הגרף שלה (פרבולה) סימטרי ביחס לציר y , והיא מקבלת ערכים חיוביים בלבד. מצאנו שהפונקציה המורכבת שחקרנו היא זוגית, ערכיה חיוביים בכל התחום, ותחומי העלייה והירידה שלה כשל הפונקציה הפנימית.
נוכל לחקור הרכבה של פונקציה מעריכית על פונקציות ריבועיות עם מאפיינים אחרים:

- מה ישתנה אם גרף הפונקציה הפנימית יהיה פרבולה עם ציר סימטריה אחר?
- מה ישתנה אם גרף הפונקציה הפנימית יהיה פרבולה שחותכת את ציר ה- x ?
- מה ישתנה אם גרף הפונקציה הפנימית יהיה פרבולה בעלת נקודת מקסימום?

אפשר לדון בכל שאלה בנפרד או לחקור את משפחת הפונקציות $y=e^{ax^2+bx+c}$.
מגוון אפשרויות נוספות לחקירה מסתעפת מתואר באיור 24. חלק מהאפשרויות יידונו בהמשך בהרחבה.



א
$y=e^{x^2+1}$
ב
$y=e^{ax+b}$
ג
$y=e^{\cos x}$
ד
$y=2^{x^2+1}$
ה
$y=0.8^{x^2+1}$
ו
$y=e^{x^2-4x+4}$
ז
$y=e^{x^2-1}$
ח
$y=e^{1-x^2}$
ט
$y=e^{(x-a)^2}$
י
$y=e^{x^2+c}$
יא
$y=e^{c-x^2}$
$y=e^{ax^2+bx+c}$
הרכבת הפונקציה $y=e^x$ על פונקציה לינארית
הרכבת הפונקציה $y=e^x$ על פונקציה טריגונומטרית
הרכבת פונקציות שונות מהמשפחה $y=a^x$ על הפונקציה $y=x^2+1$
הרכבת הפונקציה $y=e^x$ על פונקציות ריבועיות מסוגים שונים

איור 24

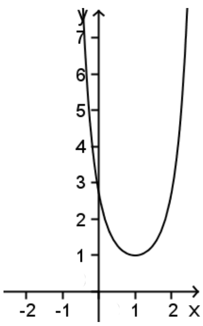
3. חקירת הפונקציה $y=e^{x^2-2x+1}$

נבצע את חקירת הפונקציה $y=e^{x^2-2x+1}$ **בדומה לחקירה הקודמת.**

אבני דרך בפתרון

$y'=(2x-2)\cdot e^{x^2-2x+1}$ ⇐ לנגזרת נקודות אפס אחת: $x=1$.
הנגזרת שלילית כאשר $x<1$ וחיובית כאשר $x>1$.
לגרף הפונקציה נקודת מינימום (1,1).

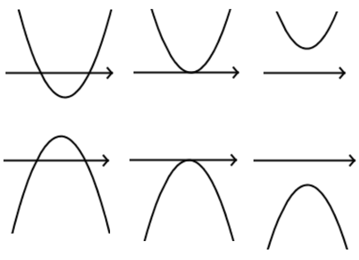
$y''=2\cdot e^{x^2-2x+1}+(2x-2)^2\cdot e^{x^2-2x+1}$ ⇐ הנגזרת השנייה חיובית בכל התחום.
הפונקציה קעורה כלפי מעלה בכל התחום ואין לה נקודות פיתול.


איור 25

כיוון שהפונקציה מוגדרת ב- $\mathbb{R}$ אין לה אסימפטוטות מאונכות.
קל לראות שאין לה גם אסימפטוטות אופקיות או משופעות.
גם הפעם הפונקציה חיובית בכל התחום, ללא נקודות חיתוך עם ציר ה- x .
גרף סכמתי מוצג באיור 25.
אלו תכונות מהותיות השתנו?
הפעם הפונקציה אינה זוגית. יחד עם זאת מעניין להצביע על העובדה שהגרף סימטרי ביחס לאנך לציר ה- x העובר דרך נקודת המינימום של הפונקציה. הסימטריה נובעת מתכונת הסימטריה של הפרבולה: $y=x^2-2x+1$.

4. חקירת משפחת הפונקציות $y=e^{ax^2+bx+c}$ $(a\neq 0)$

התכונות המשותפות לשתי הפונקציות שנחקרו בסעיפים הקודמים יכולות להעלות שאלות אחדות:
האם הגרף של הפונקציה $y=e^{ax^2+bx+c}$ יכול לחתוך את ציר ה- x? ודאי שלא. פונקציה זו מקבלת ערכים חיוביים בלבד.
האם לפונקציה $y=e^{ax^2+bx+c}$ יכולות להיות נקודות פיתול?
האם לפונקציה $y=e^{ax^2+bx+c}$ יכולה להיות אסימפטוטה אופקית?
בהמשך נראה שהתשובות לשתי השאלות האחרונות קשורות זו בזו.


איור 26

החיפוש אחר תשובות לשאלות אלה יכול להוליך לכיוונים אחדים:

- ⇦ בירור איכותני איך ייראה גרף הפונקציה $y=e^{ax^2+bx+c}$ כאשר גרף הפונקציה הפנימית הוא אחד משישת הגרפים האופייניים של פונקציה ריבועית, כמוצג באיור 26.
- ⇦ חקירה של משפחת הפונקציות $y=e^{ax^2+bx+c}$ בכלים של החשבון הדיפרנציאלי.
- ⇦ סרטוט במחשב של פונקציה עם פרמטרים, שינוי הפרמטרים באופן דינמי, ובדיקה כיצד משפיעים הפרמטרים על תכונות הפונקציה. את התופעות שנצפות בעזרת המחשב אפשר להוכיח בהמשך. ניתן לעבוד בקבוצות כשכל קבוצה מתמקדת בהיבט אחר של החקירה.

להלן חקירה של משפחת הפונקציות $y=e^{ax^2+bx+c}$.

מקרה א: $a>0$.

כל פונקציה במשפחה מוגדרת בכל ציר המספרים ואין לה נקודת חיתוך עם ציר ה- x. הגרפים של הפונקציות חותכים את ציר ה- y בנקודות: $\left(0,e^c\right)$.

לפונקציות אין אסימפטוטות אנכיות או אופקיות או משופעות.

נגזור: $\left(e^{ax^2+bx+c}\right)'=e^{ax^2+bx+c}(2ax+b)$. מכאן סימני הנגזרת הם:

$f'(x)>0$ כאשר: $x>-\dfrac{b}{2a}$ ו- $f'(x)<0$ כאשר: $x<-\dfrac{b}{2a}$.

לכן לכל הפונקציות במשפחה יש נקודת מינימום ב- $x=-\dfrac{b}{2a}$.

כמו-כן: כל פונקציה במשפחה סימטרית ביחס לישר: $x=-\dfrac{b}{2a}$, שהוא גם ציר הסימטריה של הפרבולה: $y=ax^2+bx+c$.

האם לפונקציות במשפחה יש נקודות פיתול?

נגזור פעם שנייה: $\left(e^{ax^2+bx+c}\right)''=\left(e^{ax^2+bx+c}(2ax+b)\right)'=e^{ax^2+bx+c}\left((2ax+b)^2+2a\right)$

בשל החיוביות של הפרמטר a נוכל להסיק שהנגזרת השנייה חיובית לכל x, ולכן כל הפונקציות במשפחה חסרות נקודות פיתול וקעורות כלפי מעלה בכל ציר המספרים. הגרפים של הפונקציות $y=e^{x^2+1}$ ו- $y=e^{x^2-2x+1}$ שבאיורים 23 ו- 25, וכן אחדים מן הגרפים באיור 24, הם דוגמאות לגרפים של פונקציות מהמשפחה $y=e^{ax^2+bx+c}$ עם $a>0$.

מקרה ב: $a<0$.

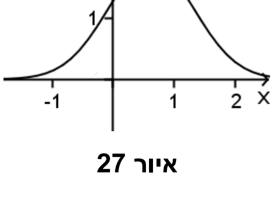
נוכל להסיק מסקנות על-פי המידע שאספנו במקרה א.

הפונקציות מוגדרות בכל ציר המספרים, והגרפים שלהן חותכים את ציר ה- y בלבד, בנקודה: $\left(0,e^c\right)$.

סימני הנגזרת במקרה $a<0$ הפוכים לאלה במקרה $a>0$, היות והנגזרת היא מכפלה של פונקציה מעריכית בפונקציה לינארית יורדת ולא בפונקציה לינארית עולה כבמקרה א. לכן לכל פונקציה במשפחה זו יש נקודת מקסימום ב- $x=-\dfrac{b}{2a}$.

נשמרת גם הסימטריה של הפונקציה המורכבת ביחס לציר הסימטריה של גרף הפונקציה הפנימית.

שני הבדלים בולטים בין הפונקציות בהן $a<0$ לבין הפונקציות בהן $a>0$:



איור 27

כאשר $a<0$ יש לפונקציה אסימפטוטה אופקית: $y=0$. כיוון שכאשר $x\to\pm\infty$, ערכי הפונקציה הריבועית שואפים ל- $-\infty$, וכיוון שערכי הפונקציה $y=e^x$ שואפים לאפס כאשר $x\to-\infty$, ערכי הפונקציה המורכבת $y=e^{ax^2+bx+c}$ עם $a<0$ שואפים לאפס עבור $x\to-\infty$.

איפוס הנגזרת השנייה ובדיקת סימני הנגזרת השנייה מגלים כי לפונקציות $y=e^{ax^2+bx+c}$ בהן $a<0$ יש שתי נקודות פיתול: $x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{1}{\sqrt{-2a}}$, אחת מכל צד של ציר הסימטריה.

איור 27 מציג סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)=e^{-x^2+1.25x+0.25}$, כדוגמה לפונקציה מהמשפחה $y=e^{ax^2+bx+c}$ עם $a<0$.

5. יצירת דוגמאות

תהליך היצירה של דוגמאות מאפשר ללומד לארגן את הידע שרכש, לבחון אותו וללטשו במידת הצורך.

מצאו, אם אפשר, פונקציות מהמשפחה $y=e^{ax^2+bx+c}$ על-פי התכונות המבוקשות בכל סעיף. אם לא קיימת פונקציה כזו - הסבירו מדוע. בדקו את תשובותיכם באמצעות תוכנה לסרטוט גרפים.

א. פונקציה זוגית בעלת נקודת מינימום

ב. פונקציה אי-זוגית

ג. פונקציה בעלת נקודת מקסימום שסימטרית ביחס לישר $x=1$

ד. פונקציה בעלת נקודת מינימום ושתי נקודות פיתול

ה. פונקציה שנקודת המינימום שלה $(0,1)$

ו. פונקציה שנקודת המקסימום שלה $(0,1)$

ז. פונקציה שאחת מנקודת הפיתול שלה $(0,1)$.

6. הרכבה של פונקציה מעריכית על פונקציה טריגונומטרית – הפונקציה $y=e^{\cos x}$ כדוגמה

לקראת החקירה של הפונקציה $y=e^{\cos x}$, אתם מוזמנים:

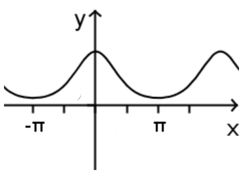
א. לסרטט סקיצה של הגרף על סמך היכרותכם עם הגרפים של הפונקציות $y=e^x$ ו- $y=\cos x$.

ב. לערוך רשימה של מרכיבי ידע הדרושים לתלמידים על מנת לסרטט סקיצה של הגרף לפני חקירת הפונקציה.

אבני דרך בפתרון

$y'=-\sin x\cdot e^{\cos x}$ ⇐ נקודות האפס ותחומי החיוביות והשליליות של הנגזרת זהים לאלו של נגזרת הפונקציה הפנימית $y=\cos x$.

לכן תחומי העלייה והירידה ושיעורי ה- x של נקודות הקיצון, הם כשל הפונקציה $y=\cos x$.



איור 28

$y''=e^{\cos x}(\sin^2 x-\cos x)$ ⇐ לפונקציה נקודת פיתול בין כל שתי נקודות קיצון, אולם שיעורי ה-x שלהן שונים משיעורי ה- x של נקודות הפיתול בפונקציה $y=\cos x$.

הרכבה של הפונקציה המעריכית $y = e^x$ על פונקציה אחרת – נקודות לסיכום

ערכי ה-x של נקודות הקיצון ותחומי העלייה והירידה של פונקציה מורכבת $y = e^{f(x)}$ נקבעים על-ידי הפונקציה הפנימית $f(x)$. אפשר להוכיח תכונה זו באופן איכותני, על סמך המונוטוניות (העלייה) של הפונקציה $y = e^x$ בתחום $-\infty < x < \infty$, או באמצעות הנגזרת $y' = \left(e^{f(x)}\right)' = f'(x) \cdot e^{f(x)}$.

לעומת זאת שיעורי ה-x של נקודות הפיתול של הפונקציה המורכבת, אינם חייבים להתלכד עם שיעורי ה-x של נקודות הפיתול של הפונקציה הפנימית.
אם נחליף את הבסיס e בבסיס חיובי קטן מ- 1 יתחלפו תחומי העלייה והירידה של הפונקציה המורכבת וישתנה סוג הקיצון שלה.

פעילות 6: פונקציות המתקבלות ממכפלה של פונקציה מעריכית בפונקציה אחרת

1. נקודת מוצא - חקירת הפונקציה $y = xe^x$

חקירה של פונקציה כזו תזמן דיון מעמיק בגבולות. בהמשך נפתח את החקירה הזו על-ידי הכללה.
להלן מוצגת משימת חקירה, המאפשרת קיום דיון במהלך החקירה.

חקרו את הפונקציה: $y = xe^x$ לפי הסעיפים הבאים:
א. ציינו מהו תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ג. גזרו את הפונקציה, מצאו את נקודות הקיצון שלה ואפיינו אותן.

ד. הציעו סקיצות של גרף הפונקציה שיכולות להתאים למידע שנאסף עד כה. ציינו מהו המידע הנוסף הדרוש כדי לספק סקיצה מדויקת יותר.

ה. ציינו האם יש אסימפטוטות אנכיות, אופקיות או משופעות לגרף הפונקציה.

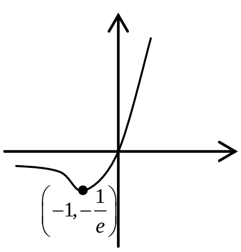
ו. מצאו את נקודות הפיתול של הפונקציה ואת תחומי הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה שלה.

פתרון

א. תחום הגדרה: $\mathbb{R}$.

ב. נקודת חיתוך עם הצירים: $(0,0)$.

ג. נגזרת: $y' = e^x(x+1)$. הנגזרת חיובית בתחום: $x > (-1)$, ושלילית בתחום: $x < (-1)$. נקודת קיצון: $\min\left(-1, -\frac{1}{e}\right)$.



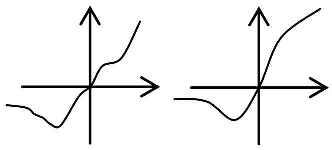
איור 29

ד. לפי הנתונים שאספנו, עוד לפני בחינת הגבולות, אפשר להציע את הסקיצה שבאיור 29:

הפונקציה עולה בתחום $x>(-1)$ ויורדת בתחום $x<(-1)$. על-פי נתון זה וכיוון שגרף הפונקציה לא חותך את ציר ה- x פרט לראשית הצירים, הרי שחייבת להיות לה נקודת פיתול אחת לפחות בתחום $x<(-1)$. ואסימפטוטה אופקית, בקרן השלילית של ציר ה- x, אשר נמצאת מתחת לציר ה-x או מתלכדת עם הציר עצמו.

יחד עם זאת, לפי נתונים אלו ייתכן שמספר כל נקודות הפיתול של הפונקציה גדול יותר. כלומר, נוכל להציע גם סקיצות נוספות. איור 30 מדגים סקיצות אפשריות נוספות.

כדי לדייק בסרטוט, יש לדעת מהו מספר נקודות הפיתול ומה היא האסימפטוטה האופקית.



איור 30

ה. כיוון שאין לפונקציה נקודות אי-הגדרה אין לה אסימפטוטה אנכית.

חישובי גבולות למציאת אסימפטוטה אופקית:

הגבול: $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x$, הוא גבול של מכפלה של שתי פונקציות המקיימות: $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$. בשל כך גבול המכפלה גם הוא אינסופי. כלומר: בקרן החיובית של ציר ה- x אין לפונקציה אסימפטוטה אופקית. לא יכולה להיות לה כאן גם אסימפטוטה משופעת, כי הפונקציה xe^x גדלה הרבה יותר מהר מכל פונקציה ליניארית כאשר $x\to\infty$.

כדי לברר את משוואת האסימפטוטה האופקית עבור $x\to-\infty$, יש לחשב את הגבול $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x$ שהוא שונה עקרונית מהגבול $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x$. הוא גבול של מכפלה של שתי פונקציות המקיימות: $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$. במצב זה לא ניתן להסיק באופן מידי מהו ערך הגבול של המכפלה.

ניתן להיעזר בכלל לופיטל, לא לפני שרושמים את הפונקציה בדרך המתאימה לתנאי המשפט על שימוש בכלל זה. נציג את הפונקציה כמנה של שתי פונקציות, ואז נבדוק האם כלל לופיטל יוכל לספק לנו מידע ביחס לערך הגבול: $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x$.

ואמנם:

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x)'}{\left(e^{-x}\right)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=0$$

גבול מהצורה: $\frac{-\infty}{\infty}$
מאפשר שימוש בכלל לופיטל.

גזירת הפונקציות
במונה ובמכנה

גבול מהצורה:
$\frac{1}{-\infty}$

אם כלל לופיטל אינו מוכר לתלמידים אפשר לגלות/לשער את האסימפטוטה באמצעות טבלת ערכים כדוגמת:

x	(-1)	(-10)	(-100)
xe^x	$\frac{-1}{e}\approx-0.367$	$\frac{-10}{e^{10}}\approx-0.00045$	$\frac{-100}{e^{100}}\approx-3.7\cdot10^{-42}$

טבלה 10

זוהי הזדמנות לשוב ולציין את העובדה שקצב הגידול המעריכי מהיר מאוד, הרבה יותר מגידול לינארי, ריבועי, או גידול של כל חזקה x^p אחרת עם מעריך $p>0$, כפי שהודגם בעמוד 423.

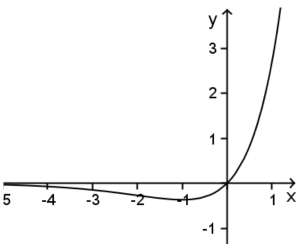
כמסקנה נוכל לשער, כמובן, כי האסימפטוטה האופקית לגרף, בקרן השלילית של ציר ה- x , היא ציר ה- x .

ו. לגילוי מספר נקודות הפיתול ותחומי הקעירות נגזור פעם שנייה: $y''=e^x(x+2)$. מכאן נסיק כי יש נקודת פיתול אחת: $x=(-2)$. הנגזרת השנייה חיובית בתחום: $x>(-2)$ ולכן הפונקציה קעורה שם כלפי מעלה;

ז. הנגזרת השנייה שלילית בתחום:

$x<(-2)$ ולכן הפונקציה קעורה שם כלפי מטה.

גרף הפונקציה $y=xe^x$ מוצג באיור 31.



איור 31

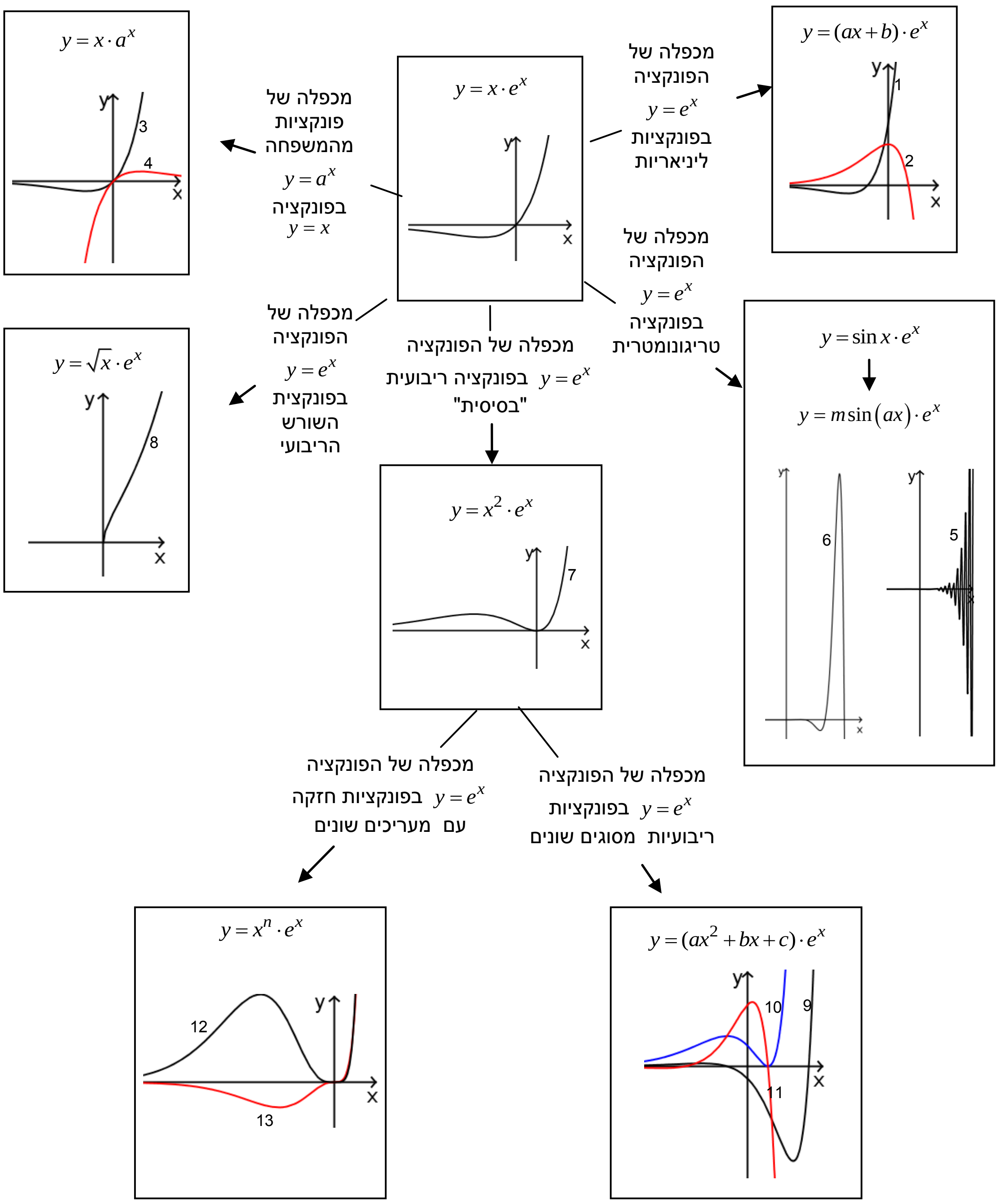
2. לאן נוכל למנף את המשימה?

פתחנו בחקירת הפונקציה $y=xe^x$ שהיא מכפלת הפונקציה המעריכית $y=e^x$ בפונקציה לינארית אי-זוגית, אשר הגרף שלה סימטרי ביחס לראשית הצירים, והיא מקבלת ערכים חיוביים כאשר $x>0$ וערכים שליליים כאשר $x<0$. מצאנו שתחומי החיוביות של הפונקציה $y=xe^x$, הם כשל הפונקציה הלינארית. עוד מצאנו כי האסימפטוטות של הפונקציה הן כשל הפונקציה המעריכית $y=e^x$.

נוכל לחקור מקרים פרטיים נוספים, למשל הפונקציות $y=x^2e^x$ ו- $y=\sqrt{x}\cdot a^x$, או משפחות של פונקציות, למשל, $y=(ax+b)\cdot e^x$, $y=x\cdot a^x$, ואחרות.

נוכל להשוות בין גרפים של פונקציות המתקבלות מהרכבה של פונקציות מעריכיות על פונקציות אחרות, לבין פונקציות המתקבלות ממכפלה של פונקציות כאלה.

איור 32 מתאר מגוון אפשרויות למנף את חקירת הפונקציה $y=xe^x$.



$y = x \cdot e^x$
מכפלה של פונקציות מהמשפחה $y = a^x$ בפונקציה $y = x$
$y = x \cdot a^x$
מכפלה של הפונקציה $y = e^x$ בפונקציות ליניאריות
$y = (ax+b) \cdot e^x$
מכפלה של הפונקציה $y = e^x$ בפונקציית השורש הריבועי
$y = \sqrt{x} \cdot e^x$
מכפלה של הפונקציה $y = e^x$ בפונקציה ריבועית "בסיסית"
$y = x^2 \cdot e^x$
מכפלה של הפונקציה $y = e^x$ בפונקציה טריגונומטרית
$y = \sin x \cdot e^x$
$y = m \sin(ax) \cdot e^x$
מכפלה של הפונקציה $y = e^x$ בפונקציות חזקה עם מעריכים שונים
$y = x^n \cdot e^x$
מכפלה של הפונקציה $y = e^x$ בפונקציות ריבועיות מסוגים שונים
$y = (ax^2 + bx + c) \cdot e^x$
x
y
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13

איור 32

3. דרכים לשאול שאלות

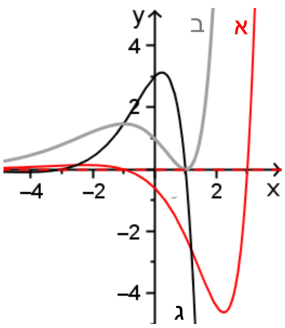
גיוון בדרכים בהן מוצגת משימת החקירה מאפשר לתלמידים להתבונן בפונקציות הנחקרות מנקודות מבט שונות, לחפש דרכי פתרון שאינן סלולות מראש, וכך להפוך את הידע לעשיר וגמיש יותר.

להלן וואריאציות שונות על חקירת משפחת הפונקציות $y=(ax^2+bx+c)\cdot e^x$.

א. לפניכם גרפים של 3 פונקציות:

(1) $y=0.2\left(x^2-2x-3\right)e^x$ (2) $y=\left(-x^2-2x+3\right)e^x$ (3) $y=\left(x^2-2x+1\right)e^x$

- ללא חקירה של הפונקציות זהו איזה גרף שייך לכל פונקציה. תארו שיקולים אפשריים שונים.
- חקרו את הפונקציה ובדקו את תשובותיכם לסעיף הקודם.



איור 33

ב. בכל סעיף הביאו, אם אפשר, דוגמאות לפונקציות מהמשפחה $y=(ax^2+bx+c)\cdot e^x$ עם התכונות המבוקשות.

(1) הפונקציה חיובית בכל התחום.

(2) הפונקציה שלילית בכל התחום.

(3) לפונקציה שתי נקודות קיצון שאחת מהן בנקודה (2,0).

(4) לפונקציה אין נקודות קיצון (תשובה: יכול לקרות רק במצב שבו גרף הפונקציה הריבועית אינו חותך את הצירים. אחת הדרכים היא באמצעות ניסוי וטעייה למצוא מצב שהנגזרת אינה מתאפסת או מתאפסת בנקודה שהיא נקודת פיתול. למשל, $y=(-x^2+2x-2)\cdot e^x$).

4. חקירת הפונקציה $y=\sin x\cdot e^x$

נדון תחילה בתכונות הפונקציה אותן ניתן להסיק בכלים איכותניים בלבד.

הפונקציה $y=e^x$ חיובית תמיד	$\Leftarrow$	נקודות האפס ותחומי החיוביות והשליליות הם כשל הפונקציה $y=\sin x$.
הפונקציה $y=\sin x\cdot e^x$ רציפה	$\Leftarrow$	בכל קטע $\left(2\pi k,2\pi k+\pi\right)$, יש לפחות נקודת מקסימום אחת ובכל קטע $\left(2\pi k+\pi,2\pi k+2\pi\right)$ יש לפחות נקודת מינימום אחת, כאשר k מספר שלם כלשהו. בין כל שתי נקודות קיצון יש לפחות נקודת פיתול אחת.
$-1\le\sin x\le 1$	$\Leftarrow$	$-e^x\le e^x\cdot\sin x\le e^x$.

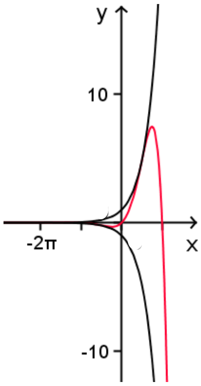
גרף הפונקציה $y=\sin x\cdot e^x$ מתנדנד אם כך, בין הגרפים של הפונקציות $y=e^x$ ו- $y=-e^x$.
כיוון שהגרפים של שתי הפונקציות $y=e^x$ ו- $y=-e^x$ עבור $x\to-\infty$ מתקרבים לאסימפטוטה $y=0$, ציר ה- x הוא גם אסימפטוטה של הפונקציה $y=\sin x\cdot e^x$, והגרף שלה מתקרב גם הוא לאסימפטוטה $y=0$, כאשר $x\to-\infty$.

חקירה באמצעות הנגזרת הראשונה והנגזרת השנייה תגלה:

$$y' = e^x(\sin x + \cos x) = e^x\left(\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = 2e^x \sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^x\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y'' = \sqrt{2}e^x\left(\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$\sqrt{2}e^x\left(\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^x 2\cos x \sin\frac{\pi}{4} = 2e^x\cos x$$



איור 34

נקודות מקסימום: $\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}\right)$ לכל k שלם.

נקודות מינימום: $\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}\right)$ לכל k שלם.

נקודות פיתול: $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, (-1)^k e^{\frac{\pi}{2}+k\pi}\right)$ לכל k שלם.

באיור 34 מוצג גרף הפונקציה $y = \sin x \cdot e^x$ בין הגרפים של הפונקציות $y = e^x$ ו- $y = -e^x$.

הגידול המהיר בערכי הפונקציה $y = e^x$ כאשר x גדל, גורם לכך שקשה למצוא חלון גרף המתאר היטב את תכונות הפונקציה. באיור 32 מוצגים הגרפים של הפונקציות $y = 0.01\sin(10x)\cdot e^x$ ו- $y = 0.01\sin x \cdot e^x$ (גרפים 5 ו- 6 באיור), שיש להן תכונות דומות לתכונות הפונקציה $y = \sin x \cdot e^x$, וקל יותר לבנות להן גרף שמשקף את תכונותיהן.

פעילות 7: הרכבה של פונקציות לוגריתמיות על פונקציות אחרות

1. חקירת הפונקציה: $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

נתונה הפונקציה $y = \ln(x^2 + 1)$.

א. מצאו נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, נקודות פיתול, ותחומי קעירות לסוגיהם, וסרטטו את גרף הפונקציה.
ב. האם יש לפונקציה אסימפטוטות?

נקודת המוצא לחקירת הפונקציות נבחרה בגלל סיבות אחדות.

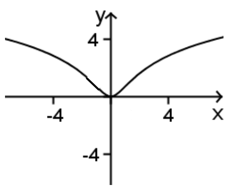
- הפונקציה הפנימית היא פונקציה ריבועית ללא שורשים, ולכן אין מגבלות על תחום ההגדרה של הפונקציה המורכבת.
- הערך המינימלי של הפונקציה הפנימית הוא 1. מכאן שערכי הפונקציה המורכבת אי-שליליים (מדוע?)
- זוגיות הפונקציה הפנימית תשמש נקודת מוצא לדיון על הקשר בין הפונקציה הנחקרת לפונקציה הפנימית.
- בחירת אותה פונקציה פנימית כמו בפעילות 5, תזמן התבוננות בפונקציות מעריכיות ולוגריתמיות המורכבות על אותה פונקציה פנימית וזיהוי קשרים ביניהן.

אבני דרך בפתרון

$y'=\dfrac{2x}{x^2+1}$ $\Leftarrow$ לנגזרת נקודות אפס אחת: $x=0$.

הנגזרת שלילית כאשר $x<0$ וחיובית כאשר $x>0$. לפונקציה נקודת מינימום (0,0).
הפונקציה עולה בתחום $x>0$ ויורדת בתחום $x<0$.

$y''=\dfrac{2-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$ $\Leftarrow$ הנגזרת השנייה מתאפסת כאשר $x=\pm1$, חיובית בין נקודות האפס, כלומר, בתחום $-1<x<1$ ושלילית מחוץ לו.
הפונקציה קעורה כלפי מעלה בתחום $-1<x<1$.
הפונקציה קעורה כלפי מטה בתחומים $1<x$ ו- $x<-1$.



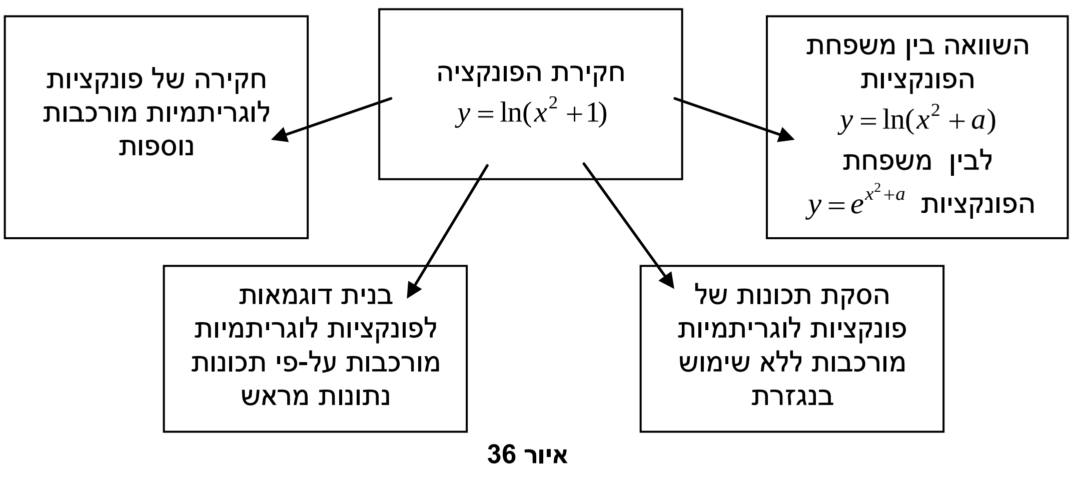
איור 35

גרף סכמתי מוצג באיור 35.
כיוון שהפונקציה רציפה ומוגדרת בכל ציר המספרים ברור שאין לה אסימפטוטה אנכית.
נראה שאין לה גם אסימפטוטה אופקית או משופעת.
בגלל זוגיות הפונקציה די לנתח את התנהגות הפונקציה כאשר $x\to+\infty$.
ניזכר בסקיצה של הפונקציה $y=\ln x$.
וכשם ש- $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ מתקיים גם: $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x^2+1)=+\infty$ שכן: $(x^2+1)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$.

כלומר: מתוך העובדה שלפונקציה $y=\ln x$ אין אסימפטוטה אופקית, הרי שגם לפונקציה $f(x)=\ln(x^2+1)$ אין אסימפטוטה אופקית, שהרי השאיפה של זו ל- $+\infty$ כאשר $x\to+\infty$ מהירה יותר!
האם יש לפונקציה אסימפטוטה משופעת?
נתבונן בנגזרת. $y'=\dfrac{2x}{x^2+1}$. כאשר $x\to+\infty$ ערכי הנגזרת שואפים לאפס. השיפוע של אסימפטוטה משופעת לעולם אינו אפס, ומכאן שלא תיתכן אסימפטוטה משופעת.

3. לאן נוכל למנף את המשימה?

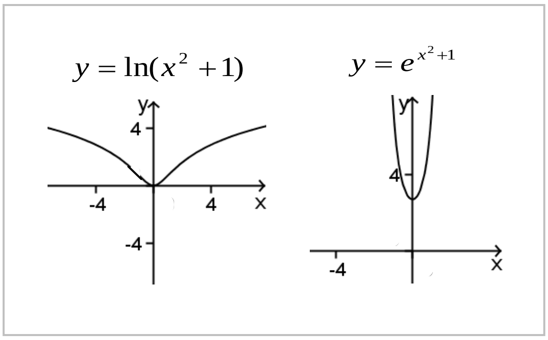
איור 32 בעמוד 478 הציג מגוון אפשרויות למשימות חקירה שנקודת המוצא שלהן היא הפונקציה $y=e^{x^2+1}$.
נוכל להתוות מסלול חקירה דומה שנקודת המוצא שלו היא הפונקציה $y=\ln(x^2+1)$.
איור 36 מציג אפשרויות נוספות לבניית משימות שנקודת המוצא שלהן היא חקירת הפונקציה $y=\ln(x^2+1)$.



איור 36

4. משפחות הפונקציות $y=e^{x^2+a}$, $y=\ln(x^2+a)$ ומה שביניהן

איור 37 מציג זה לצד זה את הגרפים של הפונקציות $y=e^{x^2+1}$ ו- $y=\ln(x^2+1)$.



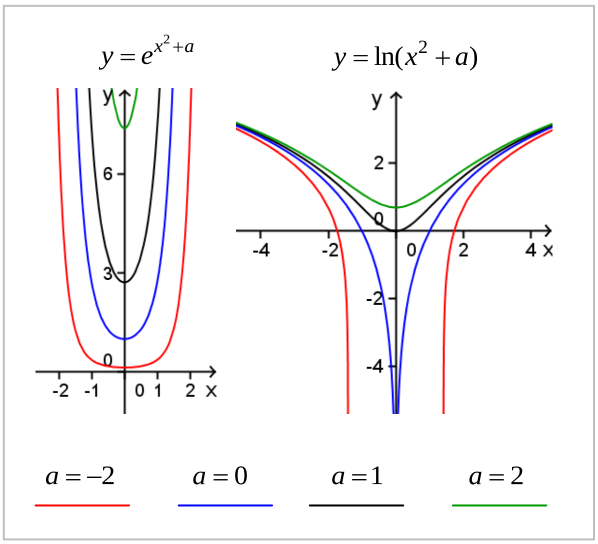
איור 37

שתי הפונקציות "ירשו" מן הפונקציה הפנימית את הזוגיות, תחומי העלייה והירידה, את ערך ה- x בנקודת הקיצון, ואת סוג הקיצון. הורשת תכונות אלה על-ידי הפונקציה הפנימית לפונקציות המורכבות, נובעת מכך שהפונקציות $y=e^x$ ו- $y=\ln x$ שתיהן פונקציות עולות בתחומן, ולכן סימן הנגזרת של הפונקציות המורכבות $y=e^{x^2+1}$ ו- $y=\ln(x^2+1)$ נקבע על-ידי סימן הנגזרת של הפונקציה הפנימית (ר' דיון בפרק על פונקציה מורכבת).

לצד קווי הדמיון בין שני הגרפים ניתן לראות גם את השפעת הגידול המהיר של הפונקציה המעריכית על הפונקציה המורכבת.

באיור 38 מוצגים מספר גרפים של פונקציות משתי המשפחות $y=e^{x^2+a}$ ו- $y=\ln(x^2+a)$.

היות ו- $e^{x^2+a}=ce^{x^2}$, כאשר $c=e^a>0$, גרף של כל פונקציה במשפחה $y=e^{x^2+a}$ מתקבל על-ידי מתיחה $(a>0)$ או כיווץ $(a<0)$ של הגרף $y=e^{x^2}$ מעל לציר x במקביל לציר y . לכן כל הגרפים במשפחה $y=e^{x^2+a}$ דומים זה לזה. לגרפים במשפחה $y=\ln(x^2+a)$ אין דמיון כללי כזה. צורת הגרף במשפחה זו, כפי שרואים באיור, תלויה עקרונית בסימן הפרמטר a .



איור 38

שינויים בפרמטר a מבליטים הבדלים בין שתי משפחות הפונקציות. בעוד שכל הפונקציות במשפחה $y=e^{x^2+a}$ מוגדרות וחיוביות בכל ציר ה- x לכל ערך ממשי של הפרמטר a, במשפחה $y=\ln(x^2+a)$ הן תחום ההגדרה והן תחומי החיוביות והשליליות תלויים בפרמטר a . אחת האפשרויות להסביר את הדמיון בין הפונקציות במשפחה $y=e^{x^2+a}$ הוא פישוט אלגברי שמוביל להצגה $y=e^a\cdot e^{x^2}$ המבליטה את העובדה שכל הפונקציות במשפחה זו מתקבלות מהפונקציה $y=e^{x^2}$ על-ידי כפל בקבוע חיובי. קשר כזה אינו קיים במשפחת הפונקציות $y=\ln(x^2+a)$. החקירה של משפחת הפונקציות $y=\ln(x^2+a)$ מזמנת חיפוש אחר תחום הגדרה, תחומי חיוביות ושליליות, ואסימפטוטות. מגבלות תחום ההגדרה מחייבות שימוש זהיר בחוקי הלוגריתמים.

5. חקירה של משפחת הפונקציות $y=\ln(x^2+a)$ - הזדמנות לבחינת חוקי הלוגריתמים

החקירה מזמנת, לצד פיתוח מיומנויות הקשורות בחקירת פונקציה לוגריתמית עם פרמטרים: מציאת אסימפטוטות, העמקה של הבנת הקשרים בין גרף של פונקציה מורכבת לבין גרף הפונקציה הפנימית, המחשה של טעויות נפוצות שמקורן בשימוש לא נכון בחוקי הלוגריתמים.

למציאת תחום ההגדרה נדרוש כי: $x^2+a>0$.

נבחין בין 3 תת-משפחה הנבדלות ביניהן בתחום ההגדרה של הפונקציה:

מקרה א: כאשר $a>0$ הפונקציה מוגדרת בכל ציר ה - x.

מקרה ב: כאשר $a=0$ הפונקציה מוגדרת בתחום $x\neq 0$.

מקרה ג: כאשר $a<0$ הפונקציה מוגדרת בתחום $x<-\sqrt{|a|}$ או $x>\sqrt{|a|}$.

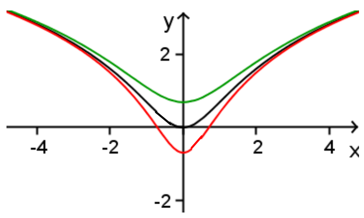
מקרה א: $a>0$.

בדומה לפונקציה $y=e^{x^2+1}$ שנחקרה כנקודת המוצא, גם הפעם תחום ההגדרה הוא $\mathbb{R}$. ניתוח הנגזרת $y'=\frac{2x}{x^2+a}$ מוביל למסקנה ש- $(0,\ln a)$, היא נקודת החיתוך של הגרף $y=\ln(x^2+a)$ עם ציר y, והיא גם נקודת המינימום.

ניתוח הנגזרת השנייה $y''=\frac{2a-2x^2}{\left(x^2+a\right)^2}$ מגלה שלפונקציה יש שתי נקודות פיתול $x=\pm\sqrt{a}$, ושהפונקציה קעורה כלפי מעלה בתחום $-\sqrt{a}<x<\sqrt{a}$, וקעורה כלפי מטה בתחומים $\sqrt{a}<x$ ו- $x<-\sqrt{a}$.

בדומה למקרה של הפונקציה $y=e^{x^2+1}$, גם הפעם נוכל להראות שלפונקציה אין אסימפטוטות.

ההבדלים בין הגרפים של הפונקציות $y=\ln(x^2+a)$ כאשר $0<a$ קשורים בנקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-x. כאשר $a>1$, לגרף אין נקודות חיתוך עם ציר ה- x. כאשר $a=1$, יש נקודת חיתוך אחת עם ציר ה-x: (0,0). כאשר $0<a<1$, גרף הפונקציה חותך את ציר x בשתי נקודות: $\left(\pm\sqrt{1-a},0\right)$.



איור 39:
משפחת הפונקציות $y=\ln\left(x^2+a\right)$
$0<a<1$
$, a=1$
$a>1$

איור 39 מציג גרפים של פונקציות מהמשפחה $y=\ln(x^2+a)$ כאשר $0<a$.

מקרה ב: $a=0$.

הפונקציה היא $y=\ln(x^2)$.

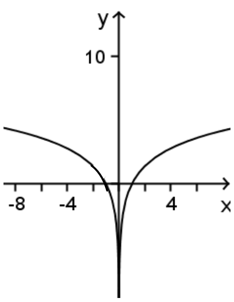
במקרה זה תחום ההגדרה הוא $x\neq 0$.

לפונקציה אסימפטוטה אנכית $x=0$, כיוון ש- $\ln(x^2)\xrightarrow[x\to 0]{}-\infty$.

לנגזרת $y'=\frac{2x}{x^2}=\frac{1}{x}$ אין נקודות אפס והיא חיובית בתחום $x>0$ ושלילית בתחום $x<0$.

מכאן שהפונקציה עולה בתחום $x>0$ ויורדת בתחום $x<0$.

בדומה למקרה של הפונקציה $y=e^{x^2+1}$, גם הפעם נוכל להראות שלפונקציה אין אסימפטוטות אופקיות או משופעות. איור 40 מציג את גרף הפונקציה $y=\ln(x^2)$.



איור 40

מקרה ג: $a<0$.

במקרה זה תחום ההגדרה של הפונקציה $y=\ln(x^2+a)$ הוא: $x<-\sqrt{|a|}$ או $x>\sqrt{|a|}$.

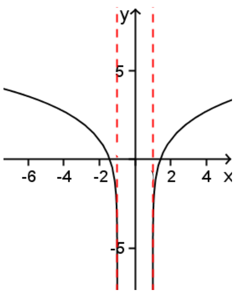
לכל פונקציה במשפחה יש שתי אסימפטוטות אנכיות, $x=-\sqrt{|a|}$ ו- $x=\sqrt{|a|}$.

הנגזרת $y'=\dfrac{2x}{x^2+a}$ חיובית בחלק החיובי של תחום ההגדרה של הפונקציה, ושלילית בחלקו השלילי. מכאן שהפונקציה עולה בתחום $x>\sqrt{|a|}$ ויורדת בתחום $x<-\sqrt{|a|}$.

הנגזרת השנייה $y''=\dfrac{2a-2x^2}{\left(x^2+a\right)^2}$ שלילית בשני חלקי תחום ההגדרה של הפונקציה, ומכאן שהפונקציה קעורה כלפי מטה בשני חלקי התחום.

גם הפעם נוכל להראות שלפונקציה אין אסימפטוטות אופקיות או משופעות.

איור 41 מציג את גרף הפונקציה $y=\ln(x^2-1)$.



איור 41

זהירות בחוקי הלוגריתמים

תלמיד חקר את הפונקציה $y=\ln(x^2)$ בדרך הבאה:

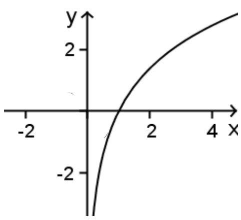
פישוט: $y=\ln(x^2)=2\ln x$.

תחום הגדרה: $x>0$.

$y'=\dfrac{2}{x}$ $\Leftarrow$ הפונקציה עולה בכל התחום.

$y'=\dfrac{-2}{x^2}$ $\Leftarrow$ הפונקציה קעורה כלפי מטה בכל התחום.

בהתאם, סרטט התלמיד גרף (איור 42).



איור 42

הסבירו את ההבדל בין הגרף שקיבל התלמיד לבין הגרף באיור 40.

תלמיד חקר את הפונקציה $y=\ln(x^2-1)$ בדרך הבאה:

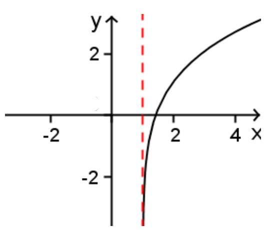
פישוט: $y=\ln\left((x-1)(x+1)\right)=\ln(x-1)+\ln(x+1)$.

תחום הגדרה: $x>1$.

$y'=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2x}{x^2-1}$ $\Leftarrow$ הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

התלמיד המשיך בחקירה והגיע למסקנה שהפונקציה קעורה כלפי מטה בכל תחום הגדרתה.

בהתאם, סרטט התלמיד גרף (איור 43).



איור 43

הסבירו את ההבדל בין הגרף שקיבל התלמיד לבין הגרף באיור 41.

הסבר

למעשה החוק $\ln xy = \ln x + \ln y$ נכון רק כאשר $x > 0$ וגם $y > 0$.

הפונקציה $y = \ln(x^2)$ מוגדרת לכל $x \neq 0$, בעוד ש- $y = 2\ln x$ מוגדרת רק כאשר $x > 0$.

הפונקציה $y = \ln\left((x-1)(x+1)\right)$ מוגדרת כאשר $x > 1$ או $x < -1$, ואילו $y = \ln(x-1) + \ln(x+1)$ מוגדרת רק כאשר $x > 1$.

בשני המקרים השימוש בחוקי הלוגריתמים גרם לאיבוד מידע.

הניסוח הנכון של החוק צריך להיות:

$\boxed{\ln xy = \ln|x| + \ln|y| \text{ כאשר } xy > 0}$ **או** $\boxed{\ln(xy) = \ln x + \ln y \text{ כאשר } x > 0 \text{ וגם } y > 0}$

כדאי לשים לב לסכנות ולמגבלות שבהפעלת חוקי הלוגריתמים:

צמצום תחום ההגדרה →	צמצום תחום ההגדרה →	צמצום תחום ההגדרה →
$\ln(x^n) = n \cdot \ln x$	$\ln(xy) = \ln x + \ln y$	$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$
← הרחבת תחום ההגדרה	← הרחבת תחום ההגדרה	← הרחבת תחום ההגדרה

פעילות 8: טובות השתיים – חקירת זוגות של פונקציות זו לצד זו

1. חקירת הפונקציות $y = \ln|x|$ ו- $y = |\ln x|$

פעילות זו, בה ניתן לסרטט את הגרפים של שתי הפונקציות ולתאר את תכונותיהן גם ללא שימוש בנגזרת, נבחרה מסיבות אחדות:

- היא מאפשרת להשוות בין מסקנות המתקבלות תוך הפעלת שיקולים איכותניים, ומסקנות שמתקבלות בדרכים אלגבריות הכוללות טיפול בערך מוחלט.
- היא מאפשרת לשוב ולדון בהשפעות של תכונות הפונקציה הפנימית והפונקציה החיצונית על תכונות של הפונקציה המורכבת, ובחשיבות סדר הפונקציות המרכיבות בפונקציה מורכבת.
- היא מפנה את תשומת הלב לכך שלפונקציה $y = \ln|x|$, בשני חלקי תחומה ($x > 0$ ו- $x < 0$) יש אותה נגזרת $y' = \frac{1}{x}$. ידע זה תומך במציאת פונקציה קדומה לפונקציה $y = \frac{1}{x}$ בתחום $x < 0$.
- היא מדגימה, על-ידי הפונקציה $y = |\ln x|$, אפשרות לקיום הנקודה בתחום של פונקציה שהיא גם נקודת קיצון של הפונקציה וגם נקודת פיתול שלה.

א. חקירת הפונקציה $y = \ln|x|$

הפונקציה $y = \ln|x|$ היא פונקציה מורכבת בה הפונקציה הפנימית $|x|$ היא פונקציה זוגית, ולכן היא בעצמה פונקציה זוגית. בקרן החיובית של ציר x היא זהה לפונקציה $y = \ln x$. לכן נוכל לסרטט את גרף הפונקציה $y = \ln|x|$ ולתאר את תכונותיה על סמך היכרותנו עם הפונקציה $y = \ln x$.

אבני דרך בחקירת הפונקציה $y=\ln|x|$, תוך שימוש בנגזרת

תחום הפונקציה: $x \neq 0$.
ציר ה- y הוא אסימפטוטה אנכית לפונקציה.

נתייחס אל הפונקציה כפונקציה עם תחום מפוצל וכך גם נגזור אותה.

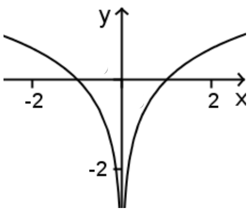
$$y=\ln|x|=\begin{cases}\ln x & x>0\\ \ln(-x) & x<0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad y'=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & x>0\\ \dfrac{1}{-x}\cdot(-1)=\dfrac{1}{x} & x<0\end{cases}$$

מצאנו שנגזרת הפונקציה $y=\ln|x|$, בשני חלקי התחום שלה, היא $y'=\frac{1}{x}$.

נזדקק לנגזרת של פונקציה זו בעתיד, כשנחפש פונקציה קדומה לפונקציה $y=\frac{1}{x}$.

נקודת האי-הגדרה של הנגזרת היא גם נקודת האי-הגדרה של הפונקציה, ואין לנגזרת נקודות אפס. מכאן שאין לפונקציה נקודות קיצון. אין לה גם נקודות פיתול כי: $y''=-\frac{1}{x^2}<0$ לכל $x\neq 0$.

הפונקציה קעורה כלפי מטה בכל תחומה.
איור 44 מציג את גרף הפונקציה $y=\ln|x|$. סימטריות הגרף ביחס לציר y משקפת את זוגיות הפונקציה.



איור 44

ב. חקירת הפונקציה $y=|\ln x|$

גם הפעם נוכל לרשום את הפונקציה באופן מפוצל, ולגזור את הפונקציה בהתאם:

$$y=|\ln x|=\begin{cases}\ln x & \ln x\geq 0\\ -\ln x & \ln x<0\end{cases}=\begin{cases}\ln x & x\geq 1\\ -\ln x & 0<x<1\end{cases}$$

נגזור את הפונקציה בתחומים החלקיים $x>1$ ו- $0<x<1$:

$$y'=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & x>1\\ -\dfrac{1}{x} & 0<x<1\end{cases}.$$

בנקודה $x=1$ הנגזרת אינה מוגדרת, כיוון שהתנאי $x\to 1^-$ גורר ש- $y'\to(-1)$ והתנאי $x\to 1^+$ גורר ש- $y'\to 1$.

נקודת האי-הגדרה של הנגזרת היא נקודת מינימום של הפונקציה $f(x)$, כיוון שהנגזרת מחליפה סימן בנקודה זו והפונקציה רציפה בה.

נתבונן בנגזרת השנייה:

$$y''=\begin{cases}-\dfrac{1}{x^2} & x>1\\ \dfrac{1}{x^2} & 0<x<1\end{cases}$$

כיוון שהנגזרת y' אינה מוגדרת בנקודה $x=1$ גם הנגזרת השנייה y'' אינה מוגדרת בנקודה זו.

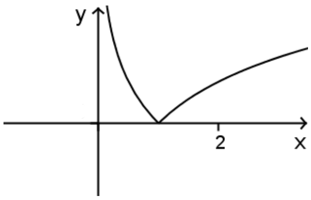
בתחום $x>1$ הנגזרת השנייה שלילית ומכאן שהפונקציה קעורה כלפי מטה.

בתחום $0<x<1$ הנגזרת השנייה חיובית ומכאן שהפונקציה קעורה כלפי מעלה.

הנקודה $x=1$ היא נקודת פיתול של הפונקציה.

הפונקציה $y=\left|\ln x\right|$ היא, אם כך, דוגמה לפונקציה שבתחום הגדרתה יש נקודה שהיא בעת ובעונה אחת נקודת קיצון ונקודת פיתול. תופעה זו יכולה להתרחש רק בנקודה שבה הנגזרת y' לא מוגדרת. (ראו עמוד 243).

איור 45 מציג את גרף הפונקציה $y=\left|\ln x\right|$.



איור 45

2. חקירת הפונקציות $f(x)=e^x+\frac{1}{e^x}$ ו- $g(x)=\ln x+\frac{1}{\ln x}$

הפונקציות $f(x)=e^x+\frac{1}{e^x}$ ו- $g(x)=\ln x+\frac{1}{\ln x}$ מתקבלות מהרכבה של אותה הפונקציה, $y=x+\frac{1}{x}$, על פונקציה מעריכית ועל פונקציה לוגריתמית.

חקרו את הפונקציות: $f(x)=e^x+\frac{1}{e^x}$ ו- $g(x)=\ln x+\frac{1}{\ln x}$.

נסו תחילה לסרטט סקיצה של כל אחד מן הגרפים ללא שימוש בנגזרת.

פרטו שיקולים שונים שהסתמכתם עליהם.

לאחר החקירה השוו את הגרפים המתקבלים עם הגרפים שסרטטתם מראש: האם, במבט לאחור, יש תכונות נוספות של הפונקציות אותן יכולתם להסיק ללא שימוש בנגזרת?

א. חקירת הפונקציה $f(x)=e^x+\frac{1}{e^x}$

בנוסף למפגש חוזר עם פונקציה e^x, שהתמקדנו בה בנקודות שונות לאורך הספר, ובנוסף לקשר בינה לבין הפונקציה הנחקרת, החקירה הנוכחית מזמנת מפגש עם פונקציה זוגית, שחזותה החיצונית אינה רומזת על היותה פונקציה זוגית.

אבני דרך בחקירת הפונקציה

הפונקציה מוגדרת בכל ציר המספרים.

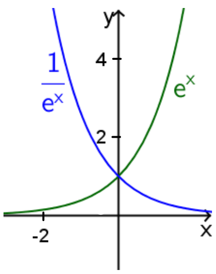
שני המחוברים של הפונקציה חיוביים תמיד ולכן הפונקציה חיובית לכל x.

מכאן שאין לגרף של פונקציה נקודות חיתוך עם ציר ה- x.

החיתוך עם ציר ה- y הוא בנקודה $(0,2)$.

אסימפטוטות:

כיוון שהפונקציה מוגדרת ורציפה בכל ציר ה- x אין לה אסימפטוטות מאונכות (אנכיות).



איור 46

לבחינת קיום אסימפטוטה אופקית נבחן את התנהגות הפונקציה עבור $x\to\pm\infty$.

נתבונן בגרפים של הפונקציות $y=e^x$ ו- $y=\frac{1}{e^x}=e^{-x}$ (איור 46). המשקפים את תכונותיהן. כפי שרואים בתמונה, הן בקרן ימין הן בקרן שמאל של ציר x, אחד המחוברים בסכום שואף לאינסוף ואחד ל- 0. מכאן, הסכום כולו שואף לאינסוף הן כאשר $x\to\infty$ והן כאשר $x\to-\infty$ לכן:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)=\infty$$

מכאן נובע כי לפונקציה $y=e^x+\frac{1}{e^x}$ אין אסימפטוטות אופקיות. אין לה גם אסימפטוטות משופעות.

אכן, הפונקציה הנגזרת $y'=e^x-\frac{1}{e^x}$ היא הפרש הפונקציות המוצגות באיור לעיל כאשר המחוסר הוא e^x. מהאיור נובע כי הפרש זה שואף ל-∞ כאשר $x\to\infty$ והוא שואף ל- $(-\infty)$ כאשר $x\to-\infty$. מכאן, הגרף $y=e^x+\frac{1}{e^x}$ נעשה יותר ויותר תלול כאשר $x\to\pm\infty$, ללא מגבלה, כך שאינו יכול להתקרב לישר משופע, ולכן אין לפונקציה אסימפטוטות משופעות.

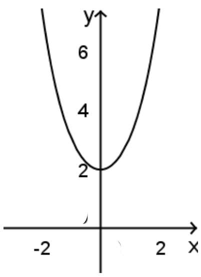
מכאן שלפונקציה $f(x)=e^x+\frac{1}{e^x}$ אין אסימפטוטות מסוג כלשהו.

בטבלה הבאה מתקבלות מסקנות נוספות לגבי הפונקציה $f(x)=e^x+\frac{1}{e^x}$ בעזרת נגזרתה.

$f'(x)=\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)'=e^x-\frac{1}{e^x}$ $\Leftarrow$	הנגזרת של $f(x)$ מתאפסת ומחליפה סימן כאשר $x=0$. הנגזרת חיובית כאשר $x>0$ ושלילית כאשר $x<0$. לפונקציה $f(x)$ יש מינימום ב- $(0,2)$.
$f''(x)=\left(e^x-\frac{1}{e^x}\right)'=e^x+\frac{1}{e^x}$ $\Leftarrow$	הנגזרת השנייה חיובית תמיד. הפונקציה קעורה כלפי מעלה בכל תחום הגדרתה, ואין לה נקודות פיתול.

טבלה 11

גרף הפונקציה $f(x)=e^x+\frac{1}{e^x}$ מוצג באיור 47.



איור 47

כדאי לשים לב שהפונקציה היא זוגית, כאשר הפונקציה הרציונאלית $y=x+\frac{1}{x}$ שהורכבה על הפונקציה $y=e^x$ היא אי-זוגית!

האם הופתענו לראות שהפונקציה הנחקרת היא פונקציה זוגית?

נוכיח את הזוגיות: $f(-x)=e^{-x}+\frac{1}{e^{-x}}=\frac{1}{e^x}+e^x=f(x)$.

נוח להבחין בזוגיות הפונקציה כאשר מציגים אותה כ- $f(x)=e^x+e^{-x}$.

ב. חקירת הפונקציה $\boldsymbol{g(x)=\ln x+\frac{1}{\ln x}}$

חקירה זו מזמנת: העמקה בנושא של השפעת התכונות של הפונקציות המרכיבות על תכונות הפונקציה המורכבת והתנסות נוספת במציאת אסימפטוטות מאונכות.

אבני דרך בחקירת הפונקציה

תחום הפונקציה $x>0,\ x\neq 1$ (מדוע?)

גם בפונקציה זו נוח לנתח את התנהגות הפונקציה $g(x)=\ln x+\frac{1}{\ln x}$, כאשר מתקרבים לנקודות אי-ההגדרה ולאינסוף, על-ידי התבוננות בכל מחובר בנפרד:

כאשר $x \to 0^+$:	כאשר $x \to 1^-$:	כאשר $x \to 1^+$:	כאשר $x \to \infty$:
$\ln x \to -\infty$	$\ln x \to 0^-$	$\ln x \to 0^+$	$\ln x \to \infty$
$\frac{1}{\ln x} \to 0^-$	$\frac{1}{\ln x} \to -\infty$	$\frac{1}{\ln x} \to \infty$	$\frac{1}{\ln x} \to 0^+$
הסכום:	הסכום:	הסכום:	הסכום:
$\ln x + \frac{1}{\ln x} \to -\infty$	$\ln x + \frac{1}{\ln x} \to -\infty$	$\ln x + \frac{1}{\ln x} \to \infty$	$\ln x + \frac{1}{\ln x} \to \infty$

לפונקציה שתי אסימפטוטות מאונכות $x=0$ ו- $x=1$

תכונות נוספות של $g(x)=\ln x+\frac{1}{\ln x}$:

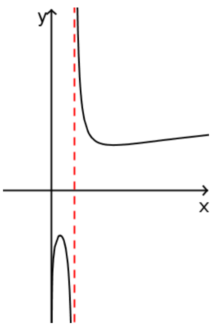
$$g(x)=\ln x+\frac{1}{\ln x}=\frac{\ln^2 x+1}{\ln x} \Leftarrow$$

בהצגה זו נוח לראות שהמונה חיובי תמיד. סימן הפונקציה נקבע על-ידי המכנה ולכן סימני הפונקציה הנחקרת הם כמו סימני הפונקציה $y=\ln x$.

$$g'(x)=\frac{\ln^2 x-1}{x\cdot\ln^2 x} \Leftarrow$$

הנגזרת מתאפסת כאשר $\ln x=\pm 1$. מכאן, $x_1=e$, $x_2=\frac{1}{e}$ הן נקודות אפס של $g'(x)$.

הנגזרת מחליפה סימן בכל נקודת אפס ואינה מחליפה סימן בנקודת האי-הגדרה $x=1$. הנקודות $(e,2)$ ו- $\left(\frac{1}{e},-2\right)$ הן נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)=\ln x+\frac{1}{\ln x}$.



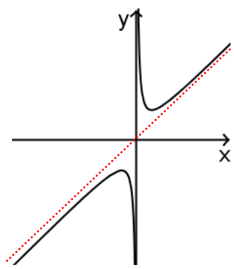
איור 48

גרף הפונקציה מוצג באיור 48.

שאלות חידוד והעמקה

א. נתבונן בגרפים של הפונקציות $y=\ln x+\frac{1}{x}$ ו- $y=x+\frac{1}{x}$.

מה יכולנו לדעת מראש אודות גרף הפונקציה $g(x)=\ln x+\frac{1}{\ln x}$, מתוך היכרות עם גרף הפונקציה $y=x+\frac{1}{x}$ (איור 49) ועם גרף הפונקציה $y=\ln x$?



איור 49

תשובה

כיוון שקבוצת ערכי הפונקציה $y=\ln x$ היא קבוצת כל המספרים הממשיים, קבוצת ערכי הפונקציה המורכבת $g(x)=\ln x+\frac{1}{\ln x}$ מתלכדת עם קבוצת ערכי הפונקציה $y=x+\frac{1}{x}$ שהיא $y\le -2 \cup y\ge 2$.

כיוון שכל הערכים השליליים של הפונקציה $y=\ln x$ מתקבלים בקטע $(0,1)$,

וכיוון שהפונקציה $y=\ln x$ מונוטונית, חלק הגרף המתאים לקטע $(0,1)$ בפונקציה $g(x)=\ln x+\frac{1}{\ln x}$ מזכיר את הענף השמאלי של גרף הפונקציה $y=x+\frac{1}{x}$.

כיוון שכל הערכים החיוביים של הפונקציה $y=\ln x$ מתקבלים בקרן $(1,\infty)$,

וכיוון שהפונקציה $y=\ln x$ מונוטונית, חלק הגרף המתאים לקרן $(1,\infty)$ בפונקציה $g(x)=\ln x+\frac{1}{\ln x}$ מזכיר את הענף הימני של גרף הפונקציה $y=x+\frac{1}{x}$. כדאי לשים לב כי בעוד שלפונקציה $y=x+\frac{1}{x}$ יש אסימפטוטה משופעת $y=x$, לפונקציה $g(x)=\ln x+\frac{1}{\ln x}$ אין אסימפטוטה משופעת. כאשר $x\to\infty$ גרף הפונקציה $g(x)=\ln x+\frac{1}{\ln x}$ הולך ומתקרב לגרף הפונקציה $g(x)=\ln x$, שערכיה שואפים לאינסוף אך שיפוע הגרף שלה שואף לאפס.

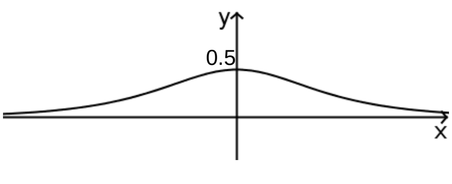
ב. מדוע לא קיבלנו גרף דומה כשחקרנו את הפונקציה $y=e^x+\frac{1}{e^x}$? (איור 47).

התשובה נעוצה בכך שקבוצת ערכי הפונקציה $y=e^x$ היא קבוצת המספרים הממשיים החיוביים. לכן בפונקציה המורכבת $y=e^x+\frac{1}{e^x}$ אין ביטוי לענף השמאלי של גרף הפונקציה $y=x+\frac{1}{x}$. אבל היות ו- e^x מונוטונית בתחום $-\infty<x<\infty$ ומקבלת בו את כל הערכים החיוביים, לגרף שלה יש דמיון מסוים לענף הימני של הגרף $y=x+\frac{1}{x}$.

3. הפונקציות $\boldsymbol{f(x)=\frac{4^x}{1+4^{2x}}}$ **ו-** $\boldsymbol{g(x)=\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^x}{1+\left(\frac{1}{4}\right)^{2x}}}$

הפעילות מזמנת:

- חקירה של פונקציה מורכבת המתקבלת על-ידי הרכבת פונקציה רציונלית על פונקציה מעריכית בבסיס שאינו e.
- מפגש עם שתי תבניות שונות לאותה הפונקציה.
- מפגש חוזר, עם פונקציה שזוגיותה אינה בולטת מתבנית הפונקציה.
- דיון באסימפטוטות.



איור 50

חקירת הפונקציה $f(x)=\frac{4^x}{1+4^{2x}}$ מובילה אל הגרף המוצג באיור 50.

לא נתאר כאן את מהלך החקירה בכל הפרטים. נתייחס רק להתנהגות הפונקציה בקצות תחום ההגדרה.
הצבת מספרים גדולים בערכם המוחלט מעלה את ההשערה שציר ה- x הוא אסימפטוטה אופקית לגרף הפונקציה. למסקנה זו נוכל להגיע גם על-ידי חישוב הגבולות.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4^x}{1+4^{2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4^x}{4^{2x}\left(\frac{1}{4^{2x}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{4^x\left(\frac{1}{4^{2x}}+1\right)}=0$$

חישוב הגבול הבא יותר פשוט. כיוון שהמונה של השבר שואף ל- 0 והמכנה ל- 1, מקבלים:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4^x}{1+4^{2x}}=\frac{0}{1+0}=0$$

חקירת הפונקציה $g(x)=\dfrac{\left(\frac{1}{4}\right)^x}{1+\left(\frac{1}{4}\right)^{2x}}$ דומה, ומובילה אל אותו תיאור גרפי.

בהמשך נראה שההצגות $f(x)=\dfrac{4^x}{1+4^{2x}}$ ו- $g(x)=\dfrac{\left(\frac{1}{4}\right)^x}{1+\left(\frac{1}{4}\right)^{2x}}$ הן הצגות שונות של אותה הפונקציה.

הערות

- התיאור הגרפי מעלה את השאלה האם הפונקציה זוגית. נוכיח את זוגיות הפונקציה באופן אלגברי.

$$f(-x)=\frac{4^{-x}}{1+4^{-2x}}=\frac{\frac{1}{4^x}}{1+\frac{1}{4^{2x}}}=\frac{\frac{1}{4^x}}{\frac{4^{2x}+1}{4^{2x}}}=\frac{\frac{4^{2x}}{4^x}}{4^{2x}+1}=\frac{4^x}{4^{2x}+1}=f(x)$$

לו מצאנו תכונה זו בתחילת החקירה, יכולנו לצפות מראש לנקודת קיצון בחיתוך הגרף עם ציר ה- y (מדוע?)

- ומה הקשר בין הפונקציה $f(x)=\dfrac{4^x}{1+4^{2x}}$ שנחקרה לבין: $g(x)=\dfrac{\left(\frac{1}{4}\right)^x}{1+\left(\frac{1}{4}\right)^{2x}}$?

מתקיים: $f(-x)=\dfrac{(4)^{-x}}{1+(4)^{-2x}}=g(x)$. אך כיוון ש- $f\left(x\right)$ זוגית, הרי שיש זהות בין $f\left(x\right)$ לבין $g\left(x\right)$.

- אחת האפשרויות להציג בכיתה את שתי הפונקציות היא לתת למחצית מהתלמידים לחקור את הפונקציה $f(x)=\dfrac{4^x}{1+4^{2x}}$, ולמחציתם את הפונקציה $g(x)=\dfrac{\left(\frac{1}{4}\right)^x}{1+\left(\frac{1}{4}\right)^{2x}}$. אפשרות אחרת היא לחקור רק אחת מהפונקציות, ואחרי גילוי תכונת הזוגיות, להפנות את תשומת הלב לאפשרות להציג את הפונקציה בדרך נוספת.

את זהות הפונקציות $f(x)=\frac{4^x}{1+4^{2x}}$ ו- $g(x)=\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^x}{1+\left(\frac{1}{4}\right)^{2x}}$ ניתן להוכיח בדרך אלגברית:

$$g(x)=\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^x}{1+\left(\frac{1}{4}\right)^{2x}}=\frac{4^{2x}}{4^x\left(1+4^{2x}\right)}=\frac{4^x}{1+4^{2x}}=f\left(x\right)$$

פעילות 9: חקירת ההרכבה של פונקציה רציונלית על פונקציה לוגריתמית

הפעילות מזמנת דיון בנקודת אי-רציפות סליקה – "חור".

נתונה הפונקציה: $y=\frac{\ln(x+1)}{2-\ln(x+1)}$.

א. מהו תחום הגדרתה?

ב. מהן נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים ? (אם יש)

ג. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה? מהן נקודות הקיצון?

ד. מהן האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה? נמקו.

ה. סרטטו סקיצה אפשרית לגרף של הפונקציה.

מתוך סעיפי החקירה נתמקד כאן בתחום ההגדרה ובאסימפטוטות.
בחיפוש אחר תחום ההגדרה נדאג שהמכנה לא יתאפס, ונדאג לתחום ההגדרה של הפונקציה הלוגריתמית:

$$x+1>0\Rightarrow x>(-1)$$
$$\ln(x+1)\neq 2\Rightarrow x+1\neq e^2\Rightarrow x\neq e^2-1$$

מכאן, תחום ההגדרה של הפונקציה הנתונה הוא קבוצת כל ערכי x המקיימים:
$x\neq e^2-1$ וגם $x>(-1)$

נבדוק את ההתנהגות של הפונקציה בקצות התחום ובנקודה $x=e^2-1$.
בקצה השמאלי:
אם נציב בפונקציה ערכי x קרובים מאוד ל- (-1), נוכל לראות שגם ערכי הפונקציה שואפים ל- (-1). השאיפה היא איטית וצריך להציב ערכים גבוהים מאוד כדי להשתכנע.

x		-0.999999999	$-1+10^{-24}$ = -0.999999999999999999999999
$y=\frac{\ln(x+1)}{2-\ln(x+1)}$		-0.912	-0.965

טבלה 12

במגבלות הידע של תלמידי תיכון, בדיקה כזאת מספיקה כדי להעלות השערה שהקצה השמאלי של הגרף הוא הנקודה $(-1,-1)$, שאינה שייכת לגרף עצמו. במצב זה אומרים שהגרף פתוח בקצה זה, או שלגרף בנקודה זו יש "חור". בסרטוט הגרף ה"חור" מסומן כנקודה ריקה.

ננסה להבין את התופעה.

נתבונן בתבנית הפונקציה: $\frac{\ln(x+1)}{2-\ln(x+1)}$.

כאשר $x \to -1^+$ ערכי הפונקציה $\ln(x+1)$ שואפים ל- $-\infty$.

לכן נוכל לשאול למה שואפים ערכי הפונקציה $\frac{\ln(x+1)}{2-\ln(x+1)}$ כאשר ערכי $\ln(x+1)$ שואפים ל- $-\infty$.

אם היינו מחליפים את $\ln(x+1)$ ב- t, יכולנו לשאול למה שואפת הפונקציה הרציונלית $\frac{t}{2-t}$ כאשר $t \to -\infty$.

בצורה זו של השאלה, קל להשתכנע שערכי הפונקציה שואפים ל- (-1).

נוכל גם לחשב את הגבול בדומה לחישוב גבול של פונקציה רציונאלית:

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{\ln(x+1)}{2-\ln(x+1)} = \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{\left(\frac{2}{\ln(x+1)} - 1\right)} = \frac{1}{(0-1)} = -1$$

מסקנה: הקצה השמאלי של הגרף הוא הנקודה $(-1,-1)$ אשר אינה שייכת לגרף. אומרים שלגרף יש "חור בנקודה $(-1,-1)$", ומסמנים אותה בגרף כנקודה ריקה. בנקודה כזו לגרף אין אסימפטוטה אנכית.

נבדוק אם קיימת אסימפטוטה בנקודת האי-הגדרה $x = e^2 - 1$.

כאשר $x \to e^2 - 1$ רק המכנה של השבר $\frac{\ln(x+1)}{2-\ln(x+1)}$ שואף לאפס ולכן:

$$\lim_{x\to (e^2-1)^+} \frac{\ln(x+1)}{2-\ln(x+1)} = -\infty$$

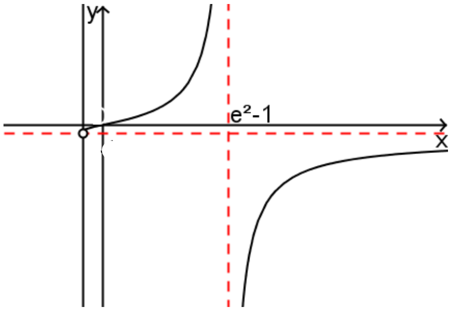
$$\lim_{x\to (e^2-1)^-} \frac{\ln(x+1)}{2-\ln(x+1)} = +\infty .$$

מסקנה: הישר $x = e^2 - 1$ הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{2-\ln(x+1)}$.

הקצה הימני של התחום של $f(x)$ נמצא באינסוף. כאשר $x \to \infty$, הערך של $\ln(x+1)$ שואף לאינסוף, ולכן:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{2-\ln(x+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{2}{\ln(x+1)} - 1\right)} = \frac{1}{0-1} = -1$$

מסקנה: הישר $y = -1$ הוא אסימפטוטה אופקית של הפונקציה $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{2-\ln(x+1)}$.

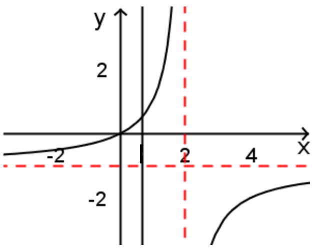


איור 51

איור 51 מציג את גרף הפונקציה $y=\frac{\ln(x+1)}{2-\ln(x+1)}$.

איור 52 מציג, לשם השוואה, את גרף הפונקציה $y=\frac{x}{2-x}$.

נשים לב לאסימפטוטה $y=-1$ המשותפת לשתי הפונקציות.



איור 52

אבל בפונקציה הרציונאלית $y=\frac{x}{2-x}$ הישר $y=-1$ מהווה אסימפטוטה לשני ענפי הגרף, כאשר בפונקציה המורכבת $y=\frac{\ln(x+1)}{2-\ln(x+1)}$ הישר $y=-1$ מהווה אסימפטוטה רק לענף הימני של הגרף. מעניין שלמרות שהישר $y=-1$ אינו אסימפטוטה לענף השמאלי של הגרף $y=\frac{\ln(x+1)}{2-\ln(x+1)}$, ערכי הפונקציה על ענף זה מתקרבים אף הם ל- (-1) כאשר נקודות על פניו מתקרבות לקצהו השמאלי.

פעילות 10: מחוץ לקופסה – בירור מספר נקודות הקיצון של פונקציה באמצעות חקירת פונקציה אחרת

לעתים ניתן למצוא את מספר נקודות הקיצון של פונקציה ואת אפיונן, גם כאשר אין ביכולתנו למצוא את נקודות הקיצון. להלן מספר דוגמאות .

1. חקירת משפחת הפונקציות $y=e^{mx}(x^2-3x+1)$, $m\neq 0$

א. הראו שלכל הפונקציות מהמשפחה, יש נקודת מינימום אחת ונקודת מקסימום אחת.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה עבור m חיובי ועבור m שלילי.

אבני דרך בפתרון

עבור $m>0$ כאשר x שואף לאינסוף, הפונקציה שואפת לאינסוף יותר מהר מכל פונקציה ליניארית. לכן בקרן החיובית של ציר x אין לה אסימפטוטה אופקית או משופעת.

כאשר x שואף למינוס אינסוף, הפונקציה שואפת ל- 0. לכן בקרן השלילית של ציר x יש לה אסימפטוטה אופקית $y=0$.

את הנגזרת של הפונקציה $y=e^{mx}(x^2-3x+1)$, לאחר פישוט ניתן להציג בצורה:

$$y'=e^{mx}(mx^2+(2-3m)x+m-3)$$

הפונקציה הנגזרת היא, כמו הפונקציה המקורית, מכפלה של פונקציה מעריכית ופונקציה ריבועית. לכן סימניה כסימני הפונקציה הריבועית.

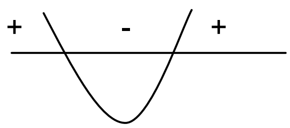
היות ו- $\Delta=\left(2-3m\right)^2-4m\left(m-3\right)=5m^2+4>0$, לפונקציה הריבועית יש שתי נקודות אפס עבור כל $m\neq 0$.

הגרף של פונקציה זו הוא פרבולה קעורה כלפי מעלה, כאשר $m>0$ (איור 53א), וקעורה כלפי מטה, כאשר $m<0$ (איור 53ב). נקודות חיתוך הפרבולה עם ציר x הן נקודות קיצון של הפונקציה הנתונה $y=e^{mx}(x^2-3x+1)$.

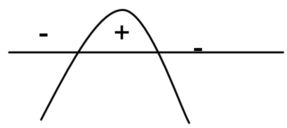
אם $m>0$, הנקודה השמאלית היא נקודת מקסימום של הפונקציה (מעבר מעלייה לירידה) והנקודה הימנית היא נקודת מינימום (מעבר מירידה לעלייה).

אם $m<0$ הנקודה השמאלית היא נקודת מינימום (מעבר מירידה לעלייה), והנקודה הימנית – נקודת מקסימום

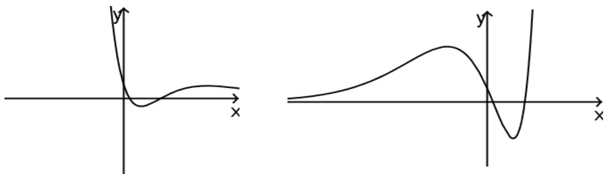
(מעבר מעלייה לירידה).



איור 53א



איור 53ב



איור 54

לקראת סרטוט הסקיצות של הגרף $y=e^{mx}(x^2-3x+1)$ עבור $m>0$ ו- $m<0$, נשים לב כי בשני המקרים לגרף יש אותן נקודות חיתוך עם ציר ה- x : $x_{1,2}=1.5\pm\sqrt{1.25}$. הסקיצות מופיעות באיור 54; הסקיצה הימנית מתאימה למקרה $m>0$, השמאלית – למקרה $m<0$.

2. חקירת הפונקציה $f(x)=\dfrac{\ln x}{3x-2}$

גם בפעילות זו נברר את מספר נקודות הקיצון מבלי למצוא אותן.

למרות שהפונקציה הנתונה אינה מכילה פרמטרים, ניתקל במשוואה שאין ביכולתנו לפתור בכלים שבידינו, ולכן נחפש את מספר נקודות הקיצון ואת טיבן בדרך עקיפה.

הפעם נעשה זאת באמצעות חקירה של פונקציה אחרת, המופיעה במונה הנגזרת.

בנוסף, הפעילות מזמנת:

- שימוש בשיקולים שונים המאפשרים סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה ללא חישוב ערכיה.
- שימוש בשיקולים הקשורים לאופן ההתקרבות של גרף הפונקציה לאסימפטוטה.

מידע ראשוני לגבי הפונקציה הנתונה שאין קושי מיוחד לאסוף

תחום ההגדרה: $x>0,\ x\neq\dfrac{2}{3}$.

נקודת חיתוך יחידה של הגרף עם הצירים היא $(1,0)$.

אסימפטוטה אופקית $y=0$. ניתן לשער אותה על-ידי חישוב ערכי הפונקציה עבור ערכי x הולכים וגדלים, או לחשב את גבול הפונקציה כאשר x שואף לאינסוף, באמצעות כלל לופיטל.

בנקודה $\left(\dfrac{2}{3},0\right)$ עוברת אסימפטוטה אנכית $x=\dfrac{2}{3}$, כי:

$$\lim_{x\to\frac{2}{3}^-}\frac{\ln x}{3x-2}=+\infty \quad ; \lim_{x\to\frac{2}{3}^+}\frac{\ln x}{3x-2}=-\infty$$

יש לפונקציה אסימפטוטה אנכית נוספת $x=0$ בקצה תחום ההגדרה, כי:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{3x-2}=\infty$$

הנגזרת של הפונקציה $f(x)=\frac{\ln x}{3x-2}$ היא:

$$f'(x)=\frac{3x(1-\ln x)-2}{x(3x-2)^2}$$

אין באפשרותנו למצוא במפורש את פתרון המשוואה $3x(1-\ln x)=2$. לכן לא נוכל למצוא במדויק את נקודות איפוס הנגזרת. יחד עם זאת נוכל למצוא את מספרן, אם נחקור את הפונקציה $g(x)=3x(1-\ln x)$, ונמצא את מספר נקודות החיתוך של הגרף שלה עם הישר $y=2$.

חקירה בתוך חקירה:

נתונה הפונקציה $g(x)=3x(1-\ln x)$

בכמה נקודות חותך הישר $y=2$ את גרף הפונקציה?

תחום ההגדרה של $g(x)$: $x>0$. נקודת אפס: $x=e$.

חקירת הפונקציה באמצעות הנגזרת:

$$g'(x)=-3\ln x$$
$$g'(x)=0 \Rightarrow x=1$$

x	0.5	1	2
y'	+	0	–
y	↗	3	↘

טבלה 13

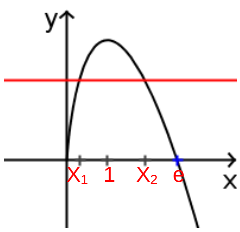
לפי הטבלה, הנקודה $(1,3)$ היא נקודת מקסימום של $g(x)$.

נסרטט סקיצה של הגרף $y=g(x)$ ונוסיף את הישר $y=2$.

נוכל להסיק:

הישר $y=2$ חותך את גרף הפונקציה g בשתי נקודות:

$0<x_1<1$ ו- $1<x_2<e$. ניתן לוודא באמצעות הצבה שאף אחת מן הנקודות איננה $x=\frac{2}{3}$, בה הפונקציה המקורית אינה מוגדרת.



איור 55

נחזור לחקירת הפונקציה f. כיוון שהנגזרת של $f(x)$ היא:

$$f'(x)=\frac{3x(1-\ln x)-2}{x(3x-2)^2}=\frac{g(x)-2}{x(3x-2)^2}$$

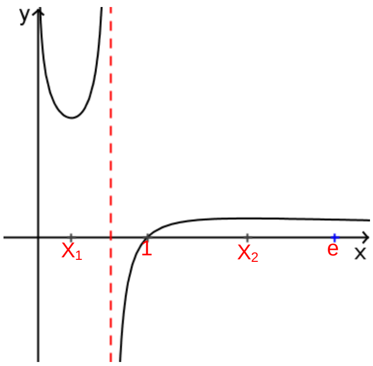
הנקודות x_1 ו- x_2 שמצאנו שייכות לתחום ההגדרה של הנגזרת $f'(x)$, והן נקודות האפס שלה. סימן הנגזרת $f'(x)$ נקבע על-ידי הסימן של $g(x)-2$.

מאיור 55 נוכל ללמוד כי הנגזרת $f'(x)$ חיובית בתחום $x_1 < x < x_2$, ושלילית מחוץ לו (למעט הנקודה $x=\frac{2}{3}$, שם $f'(x)$ אינה מוגדרת).

ניתן להסיק כי בנקודה x_1 התנהגות הפונקציה $f(x)$ משתנה מירידה לעלייה, ולכן זו נקודת המינימום של $f(x)$, ובנקודה x_2 התנהגותה משתנה מעלייה לירידה, ולכן זו נקודת המקסימום שלה.

ברור כי x_2 נמצאת מימין לאסימפטוטה $x=\frac{2}{3}$, כי $1<x_2<e$.

האם ייתכן שגם x_1 מימין לאסימפטוטה זו?



איור 56

מצב זה אינו אפשרי: בראשית החקירה מצאנו כי $\lim\limits_{x\to\frac{2}{3}^+}\frac{\ln x}{3x-2}=-\infty$.

מצב זה לא היה יכול להתקיים אילו נקודת המינימום הייתה מימין לאסימפטוטה $x=\frac{2}{3}$.

מכאן שנקודות הקיצון נמצאות משני צדי האסימפטוטה $x=\frac{2}{3}$.

גרף הפונקציה $f(x)=\frac{\ln x}{3x-2}$ מוצג באיור 56.

אתגר גדול יותר תזמן לנו משפחת הפונקציות $f(x)=\frac{\ln x}{ax+b}$, $a\neq 0$, שהפונקציה שחקרנו זה עתה היא אחת מביניהן.

3. מציאת מספר נקודות הקיצון של פונקציות מהמשפחה $f(x)=\frac{\ln x}{ax+b}$, $a\neq 0$.

גם בפעילות זו נברר את מספר נקודות הקיצון, מבלי למצוא אותן, באמצעות חקירה של פונקציה אחרת, המופיעה במונה הנגזרת. בגלל השימוש בפרמטרים שאלה זו מורכבת יותר.

הפעילות מזמנת מידע ראשוני לגבי $f(x)$ שאין קושי מיוחד לאסוף.

לפונקציה $f(x)$:

- תחום הגדרה: $x>0$ וגם $x\neq -\frac{b}{a}$.
- אם $-1\neq\frac{b}{a}<0$, יש שתי אסימפטוטות אנכיות: $x=0, x=-\frac{b}{a}$.
- אם $\frac{b}{a}=-1$, יש אסימפטוטה אנכית אחת: $x=0$, ונקודת אי-רציפות סליקה: $\left(1,\frac{1}{a}\right)$. למקרה זה נתייחס במיוחד בהמשך.
- אם $\frac{b}{a}\geq 0$, יש אסימפטוטה אנכית אחת: $x=0$ (מדוע?).
- אם $\frac{b}{a}\neq -1$, הגרף $y=f(x)$ חותך את ציר x בנקודה (1,0),
- אם $\frac{b}{a}=-1$, לגרף אין נקודות חיתוך עם ציר x.
- לגרף אין חיתוך עם ציר y, לכל b ו-$a\neq 0$.

הנגזרת של: $f(x)=\frac{\ln x}{ax+b}$ היא: $f'(x)=\frac{\frac{ax+b}{x}-a\ln x}{(ax+b)^2}=\frac{ax+b-ax\ln x}{x(ax+b)^2}=\frac{ax(1-\ln x)+b}{x(ax+b)^2}$

כדי להבין האם יש פתרון למשוואה $f'(x)=0$, נבדוק קיום פתרון למשוואה $ax(1-\ln x)=-b$. כיצד? נחקור את הפונקציה: $g(x)=ax(1-\ln x)$, ונבדוק את מספר נקודות החיתוך של הגרף שלה עם הישר $y=-b$.

חקירה בתוך חקירה: חקירת משפחת הפונקציות $g(x)=ax(1-\ln x)$, $a\neq 0$

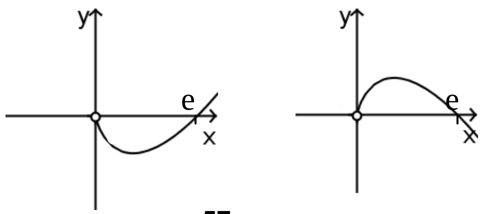
תחום הגדרה: $x>0$. חיתוך הגרף $y=g(x)$ עם ציר x : $\ln x=1 \Leftarrow (e,0)$. אין חיתוך של הגרף עם ציר y .

הנגזרת: $g'(x)=a(1-\ln x)-\frac{ax}{x}=-a\ln x$ מתאפסת ב- $x=1$.

סימני הנגזרת:

	$x<1$	$x>1$
$a>0$	+	–
$a<0$	–	+

נוכל להסיק: כאשר $a>0$ לפונקציה $g(x)$ יש נקודת מקסימום $(1,a)$. כאשר $a<0$ יש נקודת מינימום $(1,a)$. להלן סקיצות הגרף $y=g(x)$ בשני המקרים (איור 57). הגרף משמאל מתאים למקרה $a<0$ ומימין – למקרה $a>0$.



איור 57

כדי לדעת את מספר הפתרונות של המשוואה $ax(1-\ln x)=-b$, נבדוק את מספר נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)=ax(1-\ln x)$ עם הישר $y=-b$. תוצאות הבדיקה מוצגות בטבלה 14.

שתי נקודות חיתוך x_1,x_2 : $0<x_1<1$ $1<x_2<e$	אם $a>0$ ו- $0<-b<a \Leftrightarrow 0>b>-a$. או: אם $a<0$ ו- $0>-b>a \Leftrightarrow 0<b<-a$.
נקודת חיתוך אחת $x>e$	אם $a>0$ ו- $\Leftrightarrow b>0$ $-b<0$. או: אם $a<0$ ו- $-b>0 \Leftrightarrow b<0$.
נקודת חיתוך אחת $x=e$	אם $b=0$.
נקודת חיתוך אחת $x=1$	אם $b=-a$.
אין נקודות חיתוך	אם $a>0$ ו- $-b>a \Leftrightarrow b<-a$. או: אם $a<0$ ו- $-b<a \Leftrightarrow b>-a$.

טבלה 14

הערה

במקרה $b=-a$ לגרף $y=g\left(x\right)$ והישר $y=-b$ יש נקודת חיתוך אחת $x=1$, אשר אינה נמצאת בתחום של הפונקציה $f\left(x\right)=\frac{\ln x}{ax-a}=\frac{1}{a}\cdot\frac{\ln x}{x-1}$, ולכן נקודה זו לא יכולה להיות נקודת קיצון של $f\left(x\right)$. במקרה זה לפונקציה $f\left(x\right)$ אין נקודות קיצון. בשאר המקרים נקודות החיתוך של הגרף $y=ax(1-\ln x)$ והישר $y=-b$ שייכות לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)=\frac{\ln x}{ax+b}$, והנן נקודות קיצון שלה. בפרט, במקרה $b=0$ הנקודה $x=e$ היא נקודת קיצון של $f(x)=\frac{1}{a}\cdot\frac{\ln x}{x}$.

במקרה ש- $a=3,b=-2$ לפונקציה $f(x)=\frac{\ln x}{3x-2}$, על-פי הטבלה כאשר ($a>0,-b<a$), לפונקציה יש שתי נקודות קיצון: $0<x_1<1$, $1<x_2<e$.