תרגיל 4

4 בנובמבר 2018

1. יהיו A, B קבוצות סדורות היטב איזומורפיות. הוכיחו שיש בינהן איזו' סדר יחיד.
(מסקנה: מקבוצה סדורה היטב לטיפוס הסדר שלה יש רק איזו' סדר יחיד.)
הוכחה:

   נניח שיש $f, g : A \to B$ איזו' סדר. אז $g^{-1} : B \to A$ הוא איזו סדר. $f \circ g^{-1} : B \to B$ וכן $g^{-1} \circ f : A \to A$ הם איזו' סדר מקבוצה סדורה לעצמה, ולכן שניהם שווים לזהות. מכאן נובע ש$g = (g^{-1})^{-1} = f$.

2. תהי A קבוצה סדורה היטב, ו$B \subseteq A$ (לא בהכרח רישא!).

   (א) הוכיחו ש$type(B) \leq type(A)$.

   (ב) תנו דוגמא לכך ש$B \subset A$, ו$type(A) = type(B)$.
   פתרון:

   א. נסמן $type(A) = \alpha$ ו$type(B) = \beta$. נניח בשלילה ש$\beta > \alpha$. נסמן $B \to \beta : g, \alpha \to A : f$ איזו' סדר. נסתכל על $f \circ g : \beta \to \beta$. $f \circ g$ היא פו' שומרת סדר, אבל מתקיים ש $f \circ g(\alpha) < \alpha$. סתירה.

   ב. נקח $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N} \setminus \{1\}$. קל לראות שטיפוס הסדר של שתי הקבוצות האלו הוא ω.

3. הוכיחו את "קש"ב לסודרים:: אם יש פו' שומרת סדר $f : A \to B$, ופו' שומרת סדר $g : B \to A$, אז $A \cong B$.
פתרון:

   פו' שומרות סדר הן חח"ע, לכן $A \cong f(A) \subseteq B$ ו$B \cong g(B) \subseteq A$. מהתרגיל הקודם נקבל ש $type(A) \leq type(B)$ ו $type(B) \leq type(A)$. בסודרים ידוע שזה גורר $type(A) = type(B)$.. לכן $A \cong B$.

4. תנו דוגמא לכך ש $(\beta - \alpha) + \alpha \neq \beta$.
פתרון:

   נקח $\beta = \omega, \alpha = 1$. $\beta - \alpha = \omega$. אבל: $\omega \neq \omega + 1$

5. הוכיחו שלכל סודר אינסופי α (כלומר, $\omega \leq \alpha$) מתקיים:

   (א) $1 + \alpha = \alpha$.

   (ב) $n + \alpha = \alpha$ לכל n טבעי.
   פתרון:

   א. הוכחתם בהרצאה ש$\omega = 1 + \omega$.

לפי מה שראינו בתרגול, קיים סודר β כך ש $\beta + \omega = \alpha$. לכן $\alpha + 1 = 1 + (\omega + \beta) = (1 + \omega) + \beta = \omega + \beta = \alpha$.

ב. נניח נכונות עבור n. נוכיח ל$n + 1$.

$(n + 1) + \alpha = (1 + n) + \alpha = 1 + (n + \alpha) = 1 + \alpha = \alpha$.