בס"ד

# תרגיל בית מספר 7 - פתרון

שאלה 1

א ) לכל מ"מ רציף מתקיים: $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} c(4x-2x^2)dx = \int_0^2 \left(4cx-2cx^2\right)dx = 4c\int_0^2 xdx - 2c\int_0^2 x^2dx = 4c\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 - 2c\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = 8c - \frac{16}{3}c = \frac{8}{3}c = 1$$

$$\Rightarrow c = \frac{3}{8}$$

ב )

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{x}\frac{3}{8}\left(4u-2u^2\right)du = \frac{2}{3}\int_0^x udu - \frac{3}{4}\int_0^x u^2 = \frac{2}{3}\frac{u^2}{2}\Big|_0^x - \frac{3}{4}\frac{u^3}{3}\Big|_0^x = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3$$

ולכן:

$$F(X) = \begin{cases} 1 & ,x > 2 \\ \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3 & ,0 \le x \le 2 \\ 0 & ,x < 0 \end{cases}$$

ג)

$$P(X > 1.5 \mid X > 1) = \frac{P(X>1.5)\cap P(X>1)}{P(X>1)} = \frac{P(X>1.5)}{P(X>1)} = \frac{1-P(X\le 1.5)}{1-P(X\le 1)} = \frac{1-F(1.5)}{1-F(1)}$$

$$= \frac{1-(\frac{3}{4}1.5^2 - \frac{1}{4}1.5^3)}{1-(\frac{3}{4}1^2 - \frac{1}{4}1^3)} = \frac{5}{16}$$

שאלה 2

א) $\int_0^{10} cx^2(10-x)dx = c\left(\frac{10x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\Big|_0^{10}\right) = c\cdot\frac{10^4}{12} = 1 \qquad \Rightarrow c = \frac{3}{2500}$

ב)

$$E(T) = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x) = \int_0^{10} x\frac{3}{2500}x^2(10-x)dx = \ldots = 6$$

$$E(T^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot f(x) = \int_0^{10} x^2\frac{3}{2500}x^2(10-x)dx = \ldots = 40$$

$$\Downarrow$$

$$V(T) = E(T^2) - E^2(T) = 40 - 6^2 = 4$$

ג)

$$P(X \geq 9 \mid X \geq 7) = \frac{P(X \geq 9) \cap P(X \geq 7)}{P(X \geq 7)} = \frac{P(X \geq 9)}{P(X \geq 7)} = \frac{\int_9^{10} \frac{3}{2500} x^2 (10-x)dx}{\int_7^{10} \frac{3}{2500} x^2 (10-x)dx} = .. = 0.15$$

שאלה 3

$$X \sim N(151,15^2) \Rightarrow Z = \frac{X-151}{15} \sim N(0,1)$$

א.

$$P(120 \leq X \leq 155) = P\left(\frac{120-151}{15} \leq \frac{X-151}{15} \leq \frac{155-151}{15}\right) =$$

$$P(-2.067 \leq Z \leq 0.267) = P(Z \leq 0.267) - P(Z \leq -0.267) = \Phi(0.267) - (1-\Phi(0.267)) = 0.585$$

ב.

$$P(X > 180) = 1 - P(X \leq 180) = 1 - P\left(\frac{X-151}{15} \leq \frac{180-151}{15}\right) = 1 - P(Z \leq 1.933) = 1 - \Phi(1.933) = 0.0268$$

שאלה 4

נתון: $X_i \sim N(80,10^2)$

$$\frac{\sum_{i=1}^{5} X_i}{5} = \overline{X}_5 \sim N\left(80, \frac{10^2}{5}\right)$$

א.

$$P\left(\overline{X}_5 \leq 85\right) = P\left(Z \leq \frac{85-80}{\frac{10}{\sqrt{5}}}\right) = \Phi(1.12) = 0.8686$$

ב.

$$\sum_{i=1}^{10} X_i \sim N\left(10 \cdot 80, 10 \cdot 10^2\right)$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{10} X_i > 790\right) = P\left(Z > \frac{790-800}{\sqrt{10 \cdot 10}}\right) = P\left(Z > -0.316\right) = P\left(Z < 0.316\right) = \Phi(0.316) = 0.62$$

שאלה 5
הרעיון הוא להפעיל את אי שוויון צ'בישב על המשתנה הבינומי X:

$$E(X)=\sum_{j=1}^{n}E(I_j)=np=n/2$$

$$V(X)=\sum_{j=1}^{n}V(I_j)=npq=n/4$$

כאשר מ"מ $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$ ב"ת מפולגים לפי: $\begin{matrix}P(I_j=1)=p=1/2\\ P(I_j=0)=q=1/2\end{matrix}$, מכאן:

$$P(\frac{X}{Y}>1+\frac{a}{\sqrt{n}})=P(X>n-X+a\sqrt{n}-\frac{aX}{\sqrt{n}})$$

$$=P(X(2+\frac{a}{\sqrt{n}})>n+a\sqrt{n})=P(X-n/2>\frac{n+a\sqrt{n}}{2+a\sqrt{n}}-n/2)=$$

$$=P(X-n/2>\frac{a\sqrt{n}}{4+2a/\sqrt{n}})\le\frac{n/4}{\left(\frac{a\sqrt{n}}{4+2a/\sqrt{n}}\right)^2}\le\frac{(2+a/\sqrt{n})^2}{a^2}\le(for\ l\arg e\ n)=5/a^2$$

שאלה 6
לפי אי שוויון של צ'בישוב:

$$P\left(\left|\frac{S_n}{E(S_n)}-1\right|\ge\varepsilon\right)=P\left(\left|S_n-E\left(S_n\right)\right|\ge\varepsilon\cdot E\left(S_n\right)\right)\le\frac{VAR\left(S_n\right)}{\left(\varepsilon\cdot E\left(S_n\right)\right)^2}$$

$$E\left(S_n\right)=E\left(X_1\right)+...+E\left(X_n\right)=nE\left(X_1\right)$$

$$VAR\left(S_n\right)=VAR\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=\sum_{k=1}^{n}VAR\left(Y_k\right)=nVAR\left(X_1\right)$$

מאי השוויון של צ'בישב נובע כי: $P\left(\left|\frac{S_n}{E\left(S_n\right)}-1\right|>\varepsilon\right)\le\frac{VAR\left(X_1\right)}{n\left(\varepsilon\cdot E\left(X_1\right)\right)^2}\to 0$