

תרגיל 7 – קיצון מוחלט ואינטגרלים כפולים ומשולשים

1. מצאו את הערכים המקסימליים והמינימליים של הפונקציות הבאות בתחומים המתאימים:

א.  $f(x, y) = 3x - 5y + 7$  בתחום  $D = \{(x, y) : x^2 + 2y^2 \leq 2\}$

ב.  $f(x, y) = 6x^2 + 5y^2 - 10y - 12x + 7$  במשולש בעל הקודקודים  $(0,0), (0,3), (3,0)$

ג.  $f(x, y) = x^2 + 7y^2 - 13x - 1$  בתחום הכלוא בין  $y = -8$  ו  $y = -x^2 + 13x - 40$

ד.  $f(x, y) = x + y$  בתחום  $D = \{(x, y) : xy \geq 4, x + 2y \leq 9, x > 0, y > 0\}$

2. מצאו את המרחק בין  $(0,0)$  לעקומה  $-9 + 49x^2 - 36y^2 = 0$

(זכרו: המרחק בין נקודה נתונה לקבוצה הוא המרחק הקצר ביותר בין הנקודה הנתונה לנקודה כלשהי בקבוצה.)

3. מהו ערך ציר  $x$  המקסימלי של נקודה כלשהי על העקומה  $2525 - 90x + 9x^2 + 576y + 36y^2 = 0$ ?

4. חשבו את האינטגרלים הבאים:

א.  $\int_0^\pi \int_0^1 x^3 \cos(x^2 y) dx dy$

ב.  $D = [0,1] \times [0,1]$  בתחום  $\iint_D \frac{x^2 - 6}{1 + y^2} dx dy$

ג.  $D = [4,6] \times [6,9]$  בתחום  $\iint_D \frac{1}{(x+y)^2} dx dy$

ד.  $\int_0^3 \int_{3x}^9 \sin(y^2) dx dy$

ה.  $\iint_D \sin^5(8x) e^{\sqrt{y}} dx dy$  כאשר  $D$  הוא המשולש בעל הקודקודים  $(-2,0), (0,2), (2,0)$

5. החליפו את סדר האינטגרציה:

א.  $\int_1^2 \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy dx$

ב.  $\int_0^1 \int_0^{4x^2} f(x, y) dy dx + \int_1^{17} \int_0^{\sqrt{17-x}} f(x, y) dy dx$

ג.  $\int_{-1}^1 \int_{4x^3}^{\sqrt{17-x^2}} f(x, y) dy dx$

6.

א. חשבו את נפח התחום  $D = \{(x, y, z) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 - z^2\}$

ב. חשבו את המסה של הגוף  $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 3, x^2 + y^2 \leq 2z\}$  בעל פונקציית

$$\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

7. חשבו את האינטגרלים הבאים:

א.  $\iiint_D (x + y + z) dx dy dz$  בתחום  $D = \{(x, y, z) : \sqrt{y^2 + z^2} \leq x \leq \sqrt{4 - y^2 - z^2}\}$

ב. (ממבחן של דר' הורוביץ)  $\int_{-2}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z^2 dz$

ג.  $\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy$  בתחום  $D = \{(x, y) : (x^2 + y^2)^2 \leq x^2 - y^2, x \geq 0\}$

ד.  $\iint_D \sqrt{3\sqrt{x} + 2\sqrt{y}} dx dy$  בתחום  $D = \{(x, y) : \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1\}$

ה.  $\iint_D xye^{x^2-y^2} dx dy$  בתחום  $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y, 1 \leq x^2 - y^2 \leq 9\}$

שאלות לא חובה, שלא מופיעות במערכת:

8. מצאו את שטח הפנים המינימלי של גליל בעל נפח  $16\pi$ , והוכיחו שהוא אכן מינימלי.

תזכורת: גליל בעל רדיוס  $r$  וגובה  $h$  הינו בעל נפח  $\pi r^2 h$  ושטח פנים  $2\pi r(r + h)$ .

9. מצאו את השטח המקסימלי של מלבן החסום באליפסה  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ , והוכיחו שהוא אכן מקסימלי.

(מותר להניח שצלעות המלבנים החסומים מקבילות לצירים.)