תרגיל 6 ־אלגברה לינארית

14 באפריל 2018

שאלה 1

יהא $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ מעל $\mathbb{R}$.

א) מצא לאילו ערכי a הקבוצה הבאה היא בת"ל:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2a-5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ב) איך התשובה לסעיף א' היתה משתנה אם הינו חושבים על $S \subset V^{'} = \mathbb{C}^{2\times 2}$ כמטריצה מרוכבת?

2) יהי $V = \mathbb{R}_3\left[x\right]$ מעל $\mathbb{R}$.

$$S = \left\{ v_1 = 1 + x + x^2 + x^3, v_2 = -1 + x^2, p_3 = 1 - x + x^2 - x^3 \right\}$$

א) האם $1 \in span(S)$?

הדרכה:

בחרו 3 מספרים ממשיים שרירותיים a, b, c,

הציגו את 1 כצירוף לינארי של הוקטורים מ־S בצורה הבאה:

$a \cdot v_1 + b \cdot v_2 + c \cdot v_3 = 1$.

קיבלתם שוויון של שני פולינומים.

בצעו כינוס איברים דומים והשוו בין המקדמים של הפולינום מצד שמאל לפולינום מצד ימין.

כל שנותר לכם הוא למצוא את a, b, c (אם קיימים).

קיבלתם מערכת של 4 משוואות ב־3 נעלמים.

בנו מטריצה ופתרו את המערכת.

תזכורת: יתכן שלמערכת יש אינסוף פתרונות, לנו מספיק למצוא פתרון אחד.

ב) מצא $span(S)$ (אלו תנאים $v = a + bx + cx^2 + dx^3$ צריך לקיים?)

הדרכה: זו הכללה של סעיף א'

בחרו פולינום כללי ממעלה 3 : $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ותמשיכו כמו בסעיף א' .

ג) האם S בת"ל?

הדרכה:

בחרו מספרים ממשיים שרירותיים a, b, c,

הציגו את 0 כצירוף לינארי של איברי S והמשיכו כמו בסעיף א'.

3) תהא $U \subset \mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצה משולשית עליונה כך שאיברי האלכסון שלה כולם שונים מאפס.

הוכח כי שורות של U בת"ל.

4) יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ותהי

$S = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \subset V$.

נניח שוקטור v_n תלוי לינארית בוקטורים האחרים.

הוכח ש־$span\,(S) = span(S')$ כאשר $S' = \{v_1, v_2, ..., v_{n-1}\}$

הדרכה: הוכיחו בעזרת הכלה דו כיוונית.

ברור ש־$span(S') \subseteq span(S)$. כדי להסביר זאת השתמשו בהערה הבאה שראינו בתרגול:

אם W הוא תת מרחב לינארי המכיל את קבוצת הוקטורים S אזי W מכיל גם $span(S)$,

כלומר ה־$span(S)$ הוא תת מרחב מינימלי שמכיל את הקבוצה S כלומר הוא מוכל בכל תת מרחב שמכיל את S.

כדי להראות את ההכלה ההפוכה, הראו ש־כל וקטור מ־$span(S)$ הוא צירוף לינארי של

וקטורים מ־ S'.

מסקנה חשובה מהתרגיל: בהינתן קבוצת וקטורים אשר תלוים ליארית, ניתן להוריד ממנה את הוקטורים שתלוים בוקטורים אחרים מבלי לשנות את המרחב הנפרש.

שאלה 5

האם הורטור $\begin{pmatrix}10\\20\\5\end{pmatrix}$ הוא צירוף לינארי של $\left\{\begin{pmatrix}2\\10\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}\right\}$?

שאלה 6 (רשות)

הוכח/הפרח:

$sp\left\{v_1,v_2\right\}=sp\left\{v_1+v_2,v_1-v_2\right\}$