גאומטריה דיפרנציאלית – פתרון תרגיל 4

.1

א. כדי למצוא את הפרמטר הטבעי נחשב את הנגזרת הראשונה:

$$\alpha'(t)=(-4\sin t,-5\cos t,3\sin t).$$

ואת הנורמה שלה:

$$\|\alpha'(t)\|=\sqrt{16\sin^2 t+25\cos^2 t+9\sin^2 t}=\sqrt{25}=5$$

הפרמטר הטבעי מקיים $s=\int_0^t\|\alpha'(u)\|du=\int_0^t 5du=5t$.

ב. בפרמטריזציה טבעית $\alpha(s)=\left(4\cos\frac{s}{5},5-5\sin\frac{s}{5},-3\cos\frac{s}{5}\right)$. נמצא את העקמומיות והפיתול ע"י נוסחאות (במקרה של פרמטר טבעי) מההרצאה: $\kappa=\|\alpha''\|,\tau=\frac{\det[\alpha'|\alpha''|\alpha''']}{\kappa^2}$.

לצורך כך, יש לחשב את הנגזרת הראשונה, השנייה והשלישית.

$$\alpha'(s)=\left(-\frac{4}{5}\sin\frac{s}{5},-\cos\frac{s}{5},\frac{3}{5}\sin\frac{s}{5}\right)$$
$$\alpha''(s)=\left(-\frac{4}{25}\cos\frac{s}{5},\frac{1}{5}\sin\frac{s}{5},\frac{3}{25}\cos\frac{s}{5}\right)$$
$$\alpha'''(s)=\left(\frac{4}{125}\sin\frac{s}{5},\frac{1}{25}\cos\frac{s}{5},-\frac{3}{125}\sin\frac{s}{5}\right)$$

ע"י הצבה בנוסחאות מקבלים $\kappa=\frac{1}{5},\tau=0$.

הערה: העקומות היחידות שלהן עקמומיות ופיתול קבועים הם סלילים (הוכח בהרצאה). ובגלל ש- $\tau=0$ העקומה מישורית . מכאן שהעקומה היא מעגל. העקמומיות של מעגל היא אחד חלקי הרדיוס שלו, ומכאן אנו רואים שרדיוס המעגל הוא 5.

ג. נציב בנוסחה לאורך עקומה: $L[\alpha]=\int_0^{2\pi}\|\alpha'(t)\|dt=10\pi$. זהו היקף מעגל בעל רדיוס 5.

2. ידוע ש- $r_{,ij}=\Gamma_{ij}^{p}r_{,p}+b_{ij}\hat{n}$ וגם $r_{,kl}=\Gamma_{kl}^{q}r_{,q}+b_{kl}\hat{n}$ (עם הסכם הסכימה של אינשטיין). נשתמש בלינאריות המכפלה הפנימית:

$$\left\langle r_{,ij},r_{,kl}\right\rangle=\left\langle \Gamma_{ij}^{p}r_{,p}+b_{ij}\hat{n},\Gamma_{kl}^{q}r_{,q}+b_{kl}\hat{n}\right\rangle=\Gamma_{ij}^{p}\Gamma_{kl}^{q}\left\langle r_{,p},r_{,q}\right\rangle+\Gamma_{ij}^{p}b_{kl}\left\langle r_{,p},\hat{n}\right\rangle+\Gamma_{kl}^{q}b_{ij}\left\langle \hat{n},r_{,q}\right\rangle+b_{ij}b_{kl}\left\langle \hat{n},\hat{n}\right\rangle$$

הווקטורים המשיקים מאונכים לנורמל היחידה, ולכן שני המחוברים האמצעיים מתאפסים. ובגלל ש- $\|\hat{n}\|=1$ מקבלים $\left\langle r_{,ij},r_{,kl}\right\rangle=\Gamma_{ij}^{p}\Gamma_{kl}^{q}\left\langle r_{,p},r_{,q}\right\rangle+b_{ij}b_{kl}$. לסיום, הגדרת מקדמי התבנית היסודית הראשונה היא $g_{ij}=\left\langle r_{,i},r_{,j}\right\rangle$ ולכן $\left\langle r_{,ij},r_{,kl}\right\rangle=\Gamma_{ij}^{p}\Gamma_{kl}^{q}g_{pq}+b_{ij}b_{kl}$

3. נשים לב שהמפות לא מכסות את כל הגליל: φ_1 לא כוללת את הישר שבו $x=1$, ו- φ_2 לא כוללת את הישר שבו $x=-1$. נוכיח שהעתקת המעבר $\varphi_1^{-1}\circ\varphi_2$ חלקה. לצורך כך נראה קודם מהו תחום ההגדרה. $\varphi_2(u,v)=(\cos u,\sin u,v)$ וכדי שנוכל להפעיל על זה את φ_1^{-1} צריכים ששיעור ה-x יהיה שונה מאחד. כלומר $u\neq 2\pi k$. במפה שלנו רלוונטי רק $u\neq 0$. תחום ההגדרה מחלק את המפה של φ_2 לשתי רצועות. $I=(-\pi,0)\times(-\infty,\infty),II=(0,\pi)\times(-\infty,\infty)$. נחשב כעת את $(a,b)=\varphi_1^{-1}(\varphi_2(u,v))=\varphi_1^{-1}(\cos u,\sin u,v)$. מתקיים $\varphi_1(a,b)=(\cos u,\sin u,v)$, כלומר $(\cos a,\sin a,b)=(\cos u,\sin u,v)$. מקבלים מיד $b=v$ ו- $a=u+2\pi k$. בתחום I נצטרך להזיז, ולקחת $a=u+2\pi$, בתחום II נוכל לקחת $a=u$ ולהישאר במפה. אם כך

$$\left(\varphi_1^{-1}\circ\varphi_2\right)(u,v)=(a,b)=\begin{cases}(u+2\pi,v) & (u,v)\in I\\ (u,v) & (u,v)\in II\end{cases}$$ ובכל מקרה הפונקציה חלקה.

כעת נוכיח אותו דבר לגבי העתקת המעבר השנייה, $\varphi_2^{-1}\circ\varphi_1$. $\varphi_1(u,v)=(\cos u,\sin u,v)$ וכדי שנוכל להפעיל על זה את φ_2^{-1} צריכים $\cos u\neq -1$, כלומר $u\neq \pi+2\pi k$. במפה שלנו רק $u\neq\pi$ רלוונטי. תחום ההגדרה מחלק את המפה של φ_1 לשתי רצועות $I=(0,\pi)\times(-\infty,\infty),II=(\pi,2\pi)\times(-\infty,\infty)$. נחשב כעת את $(a,b)=\varphi_2^{-1}(\varphi_1(u,v))=\varphi_2^{-1}(\cos u,\sin u,v)$. מתקיים $\varphi_2(a,b)=(\cos u,\sin u,v)$, כלומר $(\cos a,\sin a,b)=(\cos u,\sin u,v)$. מקבלים מיד $b=v$ ו- $a=u+2\pi k$. בתחום I נוכל לקחת $a=u$ ולהישאר במפה. בתחום II נצטרך להזיז, ולקחת $a=u-2\pi$. אם כך

$$\left(\varphi_2^{-1}\circ\varphi_1\right)(u,v)=(a,b)=\begin{cases}(u,v) & (u,v)\in I\\ (u-2\pi,v) & (u,v)\in II\end{cases}$$ ובכל מקרה הפונקציה חלקה.

4. א. יש לנו פרמטריזציה פשוטה $r(u,v)=(u,v,f(u,v)),(u,v)\in D$ והיא רגולרית כי

$$rank(J_r)=rank\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ f_u & f_v\end{bmatrix}\equiv 2.$$

ב. וקטורי הנגזרות הראשונות הם $r_{,1}=(1,0,f_u),r_{,2}=(0,1,f_v)$. חישוב פשוט נותן

$$G=(g_{ij})=\begin{pmatrix}1+f_u^2 & f_uf_v\\ f_uf_v & 1+f_v^2\end{pmatrix}.$$

הנורמל הוא $\hat{n}=\frac{r_{,1}\times r_{,2}}{\left\|r_{,1}\times r_{,2}\right\|}=\frac{1}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}\left(-f_u,-f_v,1\right)$

ווקטורי הנגזרות השניות הם

$$r_{,11}=\left(0,0,f_{uu}\right)$$
$$r_{,12}=\left(0,0,f_{uv}\right)=r_{,21}$$
$$r_{,22}=\left(0,0,f_{vv}\right)$$

ע"י חישוב כל המכפלות הפנימיות $\left\langle r_{,ij},\hat{n}\right\rangle$ מקבלים את התבנית היסודית השנייה:

$$B=\left(b_{ij}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}\begin{pmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{uv} & f_{vv} \end{pmatrix}.$$

ג. אופרטור הצורה הוא

$$S=G^{-1}B=\frac{1}{\left(1+f_u^2+f_v^2\right)^{3/2}}\begin{pmatrix} \left(f_v^2+1\right)f_{uu}-f_uf_vf_{uv} & \left(f_v^2+1\right)f_{uv}-f_uf_vf_{vv} \\ \left(f_u^2+1\right)f_{uv}-f_uf_vf_{uu} & \left(f_u^2+1\right)f_{vv}-f_uf_vf_{uv} \end{pmatrix}$$

עקמומיות גאוס היא $K=\det S=\frac{f_{uu}f_{vv}-f_{uv}^2}{\left(1+f_u^2+f_v^2\right)^2}$

והעקמומיות הממוצעת היא $H=\frac{1}{2}Tr\left(S\right)=\frac{\left(f_u^2+1\right)f_{vv}+\left(f_v^2+1\right)f_{uu}-2f_uf_vf_{uv}}{2\left(1+f_u^2+f_v^2\right)^{3/2}}$.

5. אפשר להעלות בריבוע ולקבל $x^2+z^2=4$. מדובר בחצי ימני של עיגול ברדיוס 2 שמרכזו בראשית.

א. יש פרמטריזציה לעקומה ע"י קואורדינטות ספריות

$x=2\sin\phi=f\left(\phi\right),z=2\cos\phi=g\left(\phi\right),\phi\in\left[0,\pi\right]$. ולכן פרמטריזציה עבור משטח הסיבוב

תהיה $r\left(\theta,\phi\right)=\begin{pmatrix} f\left(\phi\right)\cos\theta \\ f\left(\phi\right)\sin\theta \\ g\left(\phi\right) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\sin\phi\cos\theta \\ 2\sin\phi\sin\theta \\ 2\cos\phi \end{pmatrix}$. משטח הסיבוב יהיה ספירה ברדיוס 2 שמרכזה בראשית.

ב. נחשב את התבניות היסודיות. נתחיל עם הנגזרות הראשונות:

$r_{,1}=\left(-2\sin\phi\sin\theta,2\sin\phi\cos\theta,0\right),r_{,2}=\left(2\cos\phi\cos\theta,2\cos\phi\sin\theta,-2\sin\phi\right)$ ע"י חישוב

מכפלות פנימיות מקבלים $G=\left(g_{ij}\right)=\begin{pmatrix} 4\sin^2\phi & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

הנורמל הוא $\left(-\sin\phi\cos\theta, -\sin\phi\sin\theta, -\cos\phi\right) = \hat{n} = \frac{r_{,1}\times r_{,2}}{\left\|r_{,1}\times r_{,2}\right\|}$.

הנגזרות החלקיות השניות הן:

$$r_{,11} = \left(-2\sin\phi\cos\theta, -2\sin\phi\sin\theta, 0\right)$$
$$r_{,12} = \left(-2\cos\phi\sin\theta, 2\cos\phi\cos\theta, 0\right) = r_{,21}$$
$$r_{,22} = \left(-2\sin\phi\cos\theta, -2\sin\phi\sin\theta, -2\cos\phi\right)$$

ע"י חישוב המכפלות הפנימיות מקבלים את התבנית היסודית השנייה $B = \left(b_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 2\sin^2\phi & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

אופרטור הצורה הוא $S = G^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. הערכים העצמיים שלו הם ערכי העקמומיות הראשיים. $\kappa_1 = \kappa_2 = 1/2$.

ג. נשתמש בנוסחה $\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} g^{km}\left(g_{mi,j} + g_{mj,i} - g_{ij,m}\right)$. המטריצה ההופכית למטריקה היא $\left(g^{km}\right) = \begin{pmatrix} 1/4\sin^2\phi & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$.

נתחיל עם $k=1$:

$$\Gamma_{ij}^{1} = \frac{1}{2} g^{1m}\left(g_{mi,j} + g_{mj,i} - g_{ij,m}\right) = \frac{1}{2} g^{11}\left(g_{1i,j} + g_{1j,i} - g_{ij,1}\right) + \frac{1}{2} g^{12}\left(g_{2i,j} + g_{2j,i} - g_{ij,2}\right)$$

ובגלל שהמטריקה אלכסונית נשארים עם

$$\Gamma_{ij}^{1} = \frac{1}{2} g^{11}\left(g_{1i,j} + g_{1j,i} - g_{ij,1}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{4\sin^2\phi}\left(g_{1i,j} + g_{1j,i} - g_{ij,1}\right).$$

אם כך

$$\Gamma_{11}^{1} = \frac{1}{2}\frac{1}{4\sin^2\phi}\left(g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1}\right) = 0$$
$$\Gamma_{12}^{1} = \frac{1}{2}\frac{1}{4\sin^2\phi}\left(g_{11,2} + g_{12,1} - g_{12,1}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{4\sin^2\phi}\left(8\sin\phi\cos\phi\right) = \cot\phi = \Gamma_{21}^{1}$$
$$\Gamma_{22}^{1} = \frac{1}{2}\frac{1}{4\sin^2\phi}\left(g_{12,2} + g_{12,2} - g_{22,1}\right) = 0$$

נעבור אל $k=2$:

$$\Gamma_{ij}^{2}=\frac{1}{2}g^{2m}\left(g_{mi,j}+g_{mj,i}-g_{ij,m}\right)=\frac{1}{2}g^{21}\left(g_{1i,j}+g_{1j,i}-g_{ij,1}\right)+\frac{1}{2}g^{22}\left(g_{2i,j}+g_{2j,i}-g_{ij,2}\right)$$

ובגלל שהמטריקה אלכסונית נשארים עם

$$\Gamma_{ij}^{2}=\frac{1}{2}g^{22}\left(g_{2i,j}+g_{2j,i}-g_{ij,2}\right)=\frac{1}{8}\left(g_{2i,j}+g_{2j,i}-g_{ij,2}\right).$$

אם כך:

$$\Gamma_{11}^{2}=\frac{1}{8}\left(g_{21,1}+g_{21,1}-g_{11,2}\right)=\frac{1}{8}\left(-8\sin\phi\cos\phi\right)=-\sin\phi\cos\phi$$
$$\Gamma_{12}^{2}=\frac{1}{8}\left(g_{21,2}+g_{22,1}-g_{12,2}\right)=0=\Gamma_{21}^{2}.$$
$$\Gamma_{22}^{2}=\frac{1}{8}\left(g_{22,2}+g_{22,2}-g_{22,2}\right)=0$$

ד. המשוואות הגאודזיות עבור הקואורדינטות שלנו $\left(\gamma^{1},\gamma^{2}\right)=\left(\theta,\phi\right)$ הן

$\ddot{\theta}+\cot\phi\,\dot{\theta}\dot{\phi}+\cot\phi\,\dot{\phi}\dot{\theta}=0$ וגם $\ddot{\phi}-\sin\phi\cos\phi\left(\dot{\theta}\right)^{2}=0$ אפשר לפשט קצת:

$$\begin{cases}\ddot{\theta}+2\dot{\theta}\dot{\phi}\cot\phi=0\\ \ddot{\phi}-\sin\phi\cos\phi\left(\dot{\theta}\right)^{2}=0\end{cases}$$