

לינאריות 1 לתיכוניםטים - תרגיל 3

1. נביט על המרחב $\mathbb{R}_3[x]$

- (א) האם $\{x^2, 2x + x^2, x + x^3\}$ היא קבוצה תלויה לינארית? נמקו.
 (ב) האם $x - x^3 \in \text{span}\{x^2, 2x + x^2, x + x^3\}$? נמקו.
 (ג) האם $\{x^2, 2x + x^2, x + x^3\}$ היא קבוצה פורשת? נמקו. אם היא לא פורשת, מצאו בסיס ל $\mathbb{R}_3[x]$ שמכיל אותה.

2. יהי V מרחב וקטורי. ויהיו $A, B \subseteq V$ קבוצות כלשהן. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) $\text{span}(A + B) = \text{span}(A) \cup \text{span}(B)$

(ב) $\text{span}(A \cup B) = \text{span}(A) \cup \text{span}(B)$

(ג) $\text{span}(A \cup B) = \text{span}(A) + \text{span}(B)$

(ד) $\text{span}(A \cap B) = \text{span}(A) \cap \text{span}(B)$

זכרו כי $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$

3.

(א) יהי V מרחב וקטורי מעל השדה \mathbb{Z}_p . תהי $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$ קבוצה בלתי תלויה לינארית. הוכיחו כי $|\text{span}(A)| = p^n$.

(ב) האם הסעיף הקודם נכון גם בלי הדרישה ש A בלתי תלויה לינארית? הוכיחו או הפריכו.

(ג) יהי V מרחב וקטורי מעל שדה \mathbb{F} כך ש $\text{char}(\mathbb{F}) = 0$. תהי $A \subseteq V$ קבוצה כך ש $\{0\}, \emptyset \neq A$. האם $\text{span}(A)$ תמיד אינסופי? הוכיחו או הפריכו.

4. יהי V מרחב וקטורי. יהיו U, W שני תתי מרחבים של V כך ש B_1 בסיס של U ו B_2 בסיס של W . הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) $B_1 \cup B_2$ בסיס של $U + W$

(ב) $B_1 \cup B_2$ אינו בסיס של $U + W$

(ג) אם $U \cap W = \{0\}$ אז $B_1 \cup B_2$ בסיס של $U \oplus W$.

(ד) אם $U \cap W = \{0\}$ אז $B_1 \cup B_2$ אינו בסיס של $U \oplus W$.

(ה) $B_1 \cap B_2$ בסיס של $U \cap W$.

(ו) $B_1 \cap B_2$ אינו בסיס של $U \cap W$.

5. מצאו בסיס עבור קבוצת הפתרונות של כל אחת ממערכות המשוואות הבאות (מעל \mathbb{R}). עבור כל אחת מהן מצאו גם את המימד.

(א)

$$\begin{aligned}x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\x_1 - 8x_2 + 6x_3 - 2x_4 &= 0\end{aligned}$$

(ב)

$$\begin{aligned}x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\2x_1 - 8x_2 + 6x_3 - 2x_4 &= 0\end{aligned}$$

6. מהו המימד של המרחבים הוקטוריים הבאים?

(א) \mathbb{C}^n כמרחב וקטורי מעל \mathbb{C} .

(ב) \mathbb{C}^n כמרחב וקטורי מעל \mathbb{R} .

7. יהי V מרחב וקטורי מעל \mathbb{F} ויהי $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס של V .

(א) עבור אילו ערכי $c \in \mathbb{F}$ הקבוצה $\{cv_1, \dots, cv_n\}$ היא בסיס?

(ב) עבור אילו ערכי $\alpha \in \mathbb{F}$ הקבוצה $\{v_1 + \alpha v_1, v_2 + \alpha v_1, \dots, v_n + \alpha v_1\}$ היא בסיס?

8. יהי V מרחב וקטורי ממימד 3 ויהיו $v_1, v_2, v_3 \in V$ וקטורים המקיימים $v_1 + v_2 + v_3 = 0$. הוכיחו או הפריכו:

(א) $\text{span}(\{v_1\}) + \text{span}(\{v_2\}) + \text{span}(\{v_3\}) = V$

(ב) $\text{span}(\{v_1\}) + \text{span}(\{v_2\}) + \text{span}(\{v_3\}) \neq V$

9. תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ויהי $k \in \mathbb{N}$ כך ש $A^k = 0$ אבל $A^{k-1} \neq 0$.

(א) הוכיחו כי קיים $v \in \mathbb{R}^n$ כך ש $A^{k-1}v \neq 0$.

(ב) עבור v מהסעיף הקודם, הוכיחו כי הקבוצה $\{v, Av, A^2v, \dots, A^{k-1}v\}$ בת"ל.

(ג) הוכיחו כי $A^n = 0$.