

תרגיל 3 – טורי פונקציות וחזקות

1. קבעו האם הטור $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$ מתכנס במידה שווה בקטע $[0, \infty)$

2. מצאו את תחום ההגדרה, הרציפות והגזירות של טורי הפונקציות הבאים:
(תחום ההגדרה – התחום בו הטור מתכנס, תחום הרציפות – התחום בו פונקציית הגבול רציפה, תחום הגזירות – התחום בו פונקציית הגבול גזירה).

א. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{x}{n^2}\right)$

ב. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 x}$

3. מצאו את תחום ההתכנסות של טורי החזקות הבאים:

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{3n+1}}{n2^n}$

ב. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2x+3)^n}{\ln(n)}$

ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n n!}{n^n}$

ד. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (-x)^n}{n!}$

4. תהי סדרה a_n עבורה הטור $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n a_n$ מתכנס. הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_n$ מתכנס בהחלט.

(רמז: השתמשו בעובדה שלכל טור חזקות יש רדיוס התכנסות)

5. עבור הפונקציות הבאות מצאו את $f^{(2015)}(0)$, $f^{(2016)}(0)$ (הנגזרת ה-2015 ו-2016 באפס):

א. $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$

ב. $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

ג. $f(x) = \frac{-2}{(2x^2+1)^2}$

ד. $x \cdot \arctan(x^2)$

ה. $f(x) = xe^{-x^2}$

ו. $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

6. חשבו את סכומי הטורים הבאים:

א. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!}$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$

ד. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(2n)!}$ *

ה. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ **