תורת החבורות 88-218-01 תשפ"ב
הערות תרגול

שלום!

0.1 הומומורפיזמים של חבורות

הגדרה 0.1. תהיינה G, H חבורות. פונקציה $f\colon G \to H$ נקראת הומומורפיזם של חבורות אם

$$\forall g_1, g_2 \in G, \qquad f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2)$$

הערה 0.2. תכונות הומומורפיזם $f\colon G \to H$ כוללות

1. $f(e_G) = e_H$
2. $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$
3. $f(g^n) = f(g)^n$ לכל $n \in \mathbb{Z}$.
4. הגרעין של f הוא $\ker f = \{g \in G \mid f(g) = e_H\}$, והוא תת־חבורה נורמלית של G.
5. התמונה של f היא $\operatorname{im} f = \{f(g) \mid g \in G\}$ היא תת־חבורה של H.
6. אם $G \cong H$ (כלומר הן איזומורפיות), אז $|G| = |H|$.
7. אם f איזומורפיזם, אז גם $f^{-1}\colon H \to G$ איזומורפיזם.
8. כל פעולה של G על קבוצה X שקולה להומומורפיזם $f\colon G \to S_X$. כל הומומורפיזם שקול לפעולה של G על H.

תרגיל 0.3. יהי $f\colon G \to H$ הומומורפיזם. נניח $g \in G$ שהוא מסדר n. הוכיחו כי $o(f(g)) | o(g)$.

פתרון. לפי הגדרה כמעט
$$g^n = e_G$$
ונפעיל על המשוואה האחרונה את f, ונקבל
$$f(g)^n = f(g^n) = f(e_G) = e_H$$
ולכן לפי הטענה שבה הראנו כי $x^k = e$ אם ורק אם $o(x)|k$, נסיק כי $o(f(g))|o(g)$.

תרגיל 0.4. הפריכו שכל החבורות מסדר 4 הן איזומורפיות.

פתרון. נבחר את $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ואת $H = \mathbb{Z}_4$. נשים לב שב-H יש איבר מסדר 4, שהוא 1 (וגם 3 הוא מסדר 4). נניח בשלילה שקיים איזומורפיזם $f\colon G \to H$. בחבורה G הסדר של כל האיברים הוא 1 או 2, ומפני ש-f על, אז יש מקור לאיבר $1 \in H$. נניח $f(a) = 1$. לפי התרגיל הקודם $4 = o(1) = o(f(a))|o(a)$ ואילו 4 לא מחלק את 1 או את 2. סתירה. לכן G לא איזומורפית ל-H.

לאורך שאר התרגול $f\colon G \to H$ הוא הומומורפיזם כלשהו.

תרגיל 0.5. תהי G חבורה ציקלית. הוכיחו שגם $\operatorname{im} f$ ציקלית.

פתרון. קיים $a \in G$ כך ש-$G = \langle a \rangle$. נוכיח כי $\operatorname{im} f = \langle f(a) \rangle$ לפי הכלה דו־כיוונית.

ברור כי $f(a) \in \operatorname{im} f$, ולכן גם $\langle f(a) \rangle \subseteq \operatorname{im} f$ מסגירות לפעולה ב-$\operatorname{im} f$.

בכיוון השני, יהי $h \in \operatorname{im} f$. לכן קיים $g \in G$ כך ש-$h = f(g)$. מפני ש-G ציקלית קיים i שלם עבורו $g = a^i$. לכן
$$h = f(g) = f(a^i) = f(a)^i \in \langle f(a) \rangle$$
ולכן $\operatorname{im} f = \langle f(a) \rangle$, כלומר התמונה ציקלית.

תרגיל 0.6 (לבית). אם G אבלית, אז $\operatorname{im} f$ אבלית.

משפט 0.7. כל חבורה ציקלית מסדר n איזומורפית ל-$\mathbb{Z}_n$ וכל חבורה ציקלית אינסופית איזומורפית ל-$\mathbb{Z}$.

דוגמה 0.8. מתקיים $n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ או $\mathbb{Z}_4 \cong U_5 \cong U_{10}$.

תרגיל 0.9. האם קיים איזומורפיזם $f\colon S_3 \to \mathbb{Z}_6$?

פתרון. לא! החבורה $\mathbb{Z}_6$ היא ציקלית ואילו S_3 לא ציקלית (למשל כי היא לא אבלית).

תרגיל 0.10. האם קיים איזומורפיזם $f\colon (\mathbb{Q}^+, \cdot) \to (\mathbb{Q}, +)$?

פתרון. לא! נניח בשלילה שקיים f כזה. לכן
$$\forall a \in \mathbb{Q}^+ : \qquad f(a^2) = f(a \cdot a) = f(a) + f(a)$$
נסמן $c = f(3)$, ולשים לב כי $c = \frac{c}{2} + \frac{c}{2}$. מפני ש-$f$ על (כי היא איזומורפיזם), אז קיים מקור ל-$\frac{c}{2}$, נניח x. אז
$$f(x^2) = f(x) + f(x) = \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c = f(3)$$
ומפני ש-f חח"ע, אז $x^2 = 3$, וזו סתירה כי $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}^+$.

תרגיל 0.11. האם קיים אפימורפיזם $f\colon H \to \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, כאשר $H = \langle 5 \rangle \le \mathbb{R}^*$?

$$H = \{\dots, \frac{1}{25}, \frac{1}{5}, 1, 5, 25, 125, 625, \dots\}$$

פתרון. לא! נניח בשלילה כי קיים f כזה. אז $\operatorname{im} f = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ שהיא חבורה לא ציקלית. אבל H ציקלית, ולכן $\operatorname{im} f$ ציקלית לפי תרגיל קודם. זו סתירה.

תרגיל 0.12. האם קיים מונומורפיזם $f\colon GL_2(\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}^8$?

$$\mathbb{Q}^8 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$$

פתרון. לא! נניח בשלילה שקיים f כזה, אז נסתכל על הצמצום שלו לתמונה:

$$\begin{aligned} \overline{f}\colon GL_2(\mathbb{Q}) &\to \operatorname{im} f \\ A &\mapsto f(A) \end{aligned}$$

ונשים לב כי $\overline{f}$ הוא איזומורפיזם. החבורה $GL_2(\mathbb{Q})$ לא אבלית, ולכן גם $\operatorname{im} f$ לא אבלית. אבל $\operatorname{im} f$ היא תת־חבורה של $\mathbb{Q}^8$, שהיא חבורה אבלית, ולכן $\operatorname{im} f$ בהכרח חבורה אבלית. סתירה.

מסקנה 0.13. יתכנו ארבע הפרכות ברצף.

תרגיל 0.14. מתי ההעתקה $i\colon G \to G$ המוגדרת לפי $i(g) = g^{-1}$ היא אוטומורפיזם של G?

פתרון. ברור כי i חח"ע ועל, כי היא ההופכית של עצמה, שהרי $g = (g^{-1})^{-1}$. נשאר לבדוק האם i הומומורפיזם:

$$\begin{aligned} i(xy) &= (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} \\ i(x)i(y) &= x^{-1}y^{-1} \end{aligned}$$

ויהיה שיוויון בין שתי המשוואות לעיל אם ורק אם $x^{-1}y^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ לכל $x, y \in G$. לכן i אוטומורפיזם אם ורק אם G אבלית.

0.2 תת־חבורות נורמליות

הגדרה 0.15. תהי G חבורה, ותהי $H \le G$ תת־חבורה. נאמר כי H נורמלית ב-G ונסמן $H \lhd G$ אם לכל $g \in G$ מתקיים $gH = Hg$.

טענה 0.16. תהי $H \le G$ תת־חבורה. התנאים הבאים שקולים:

1. $H \lhd G$.
2. לכל $g \in G$ מתקיים $g^{-1}Hg = H$.

3. לכל $g \in G$ מתקיים $g^{-1}Hg \subseteq H$.
4. H היא גרעין של הומומורפיזם $f\colon G \to K$ שהמקור שלו הוא G.
5. H היא נקודת שבת של הפעולה של G על קבוצת תת־החבורות שלה לגבי הצמדה.

הוכחה. נוכיח רק שהסעיף השלישי גורר את השני. החלק החשוב הוא שההכלה $H \subseteq g^{-1}Hg$ נכונה לכל $g \in G$. בפרט עבור g^{-1} של איבר כלשהו:

$$gHg^{-1} \subseteq H$$

אבל $g^{-1}g = e = gg^{-1}$. לכן

$$gHg^{-1} \subseteq H = g{\color{red}g^{-1}Hg}g^{-1} \subseteq gHg^{-1}$$

ומכאן שיש שיוויון לאורך כל ההכלות לעיל. בפרט $H = gHg^{-1}$ לכל $g \in G$. $\square$

הערה 0.17. אם G אבלית, אז כל תת־חבורה שלה היא נורמלית. אם $H \leq G$ וגם $K \leq H$, אז $K \leq G$.

אם $H \lhd G$ וגם $K \lhd H$, אז לא בהכרח K נורמלית ב-G.

נורמליות לא אומר שהאיברים מתחלפים. אם $H \lhd G$ וישנם איברים $g \in G$ ו-$h \in H$, אז ghg^{-1} לא בהכרח שווה ל-h, אלא לאיבר כלשהו של H, נניח h'. כלומר נורמליות היא כמו "חילופיות עם מס מעבר", למשל $gh = h'g$.

דוגמה 0.18. תמיד יש תת־חבורות נורמליות $G \lhd G$ וגם $\{e\} \lhd G$.

$$gGg^{-1} = G$$

או כי $Gg = gG$ לכל $g \in G$. כך גם $g\{e\} = \{g\} = \{e\}g$.

באופן אחר, נשים לב כי $\mathrm{id}\colon G \to G$ הוא הומומורפיזם. אז $\ker(\mathrm{id}) = \{e\}$. לעומת זאת $f\colon G \to G$ לפי $f(g) = e$ מקיים $\ker f = G$.

דוגמה 0.19. יהי F שדה. אז $SL_n(F) \lhd GL_n(F)$. למשל כי $SL_n(F) = \ker(\det)$ וראינו כי $\det$ היא הומומורפיזם. או למשל לפי זה ש-

$$g \cdot SL_n(F) = \{A \in GL_n(F) \,|\, \det(A) = \det(g)\} = SL_n(F) \cdot g$$

או לפי זה שלכל $A \in GL_n(F)$ ולכל $B \in SL_n(F)$:

$$\det(ABA^{-1}) = \det(A) \cdot \det(B) \cdot \det(A^{-1}) = \frac{\det(A)}{\det(A)} \det(B) = 1$$

ולכן $SL_n(F)$ סגורה תחת הצמדה.

דוגמה 0.20. לחבורה S_3 יש שלוש תת־חבורות לא נורמליות. למשל $\langle(12)\rangle$ אינה נורמלית. הרי

$$(13)\langle(12)\rangle = \{(13),(123)\} \neq \{(13),(132)\} = \langle(12)\rangle(13)$$

בחבורה D_4 תת־החבורה $\langle\sigma\rangle$ היא נורמלית, וכך גם $Z(D_4) = \langle\sigma^2\rangle$, אבל $\langle\tau\rangle$ אינה נורמלית. הרי

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = \sigma^2\tau \notin \langle\tau\rangle$$

טענה 0.21. תהי H תת־חבורה מאינדקס 2 בחבורה G. אז $H \lhd G$.

פתרון. הופיע בהרצאה.

$$G/H = \{H, G \setminus H\}$$

מסקנה 0.22. קל לבדוק כי $[D_4 \colon \langle\sigma\rangle] = \frac{8}{4} = 2$ ולכן $\langle\sigma\rangle \lhd D_4$.