מבוא לחוגים ומודולים-בוחן

עליכם לענות על כל השאלות.
בהצלחה!

1. יהי R חוג קומוטטיבי ו$I \trianglelefteq R$. נגדיר את הרדיקל של I להיות:

$$rad(I) = \{x \in R | \exists 0 \neq n \in \mathbb{N} : x^n \in I\}$$

הוכיחו את הטענות הבאות:

(א) (5 נקודות) $I \subseteq rad(I)$.

(ב) (10 נקודות) $rad(I)$ הוא אידיאל.

(ג) (15 נקודות) $rad(rad(I)) = rad(I)$.

(ד) (20 נקודות) בחוג המנה $R/rad(I)$ אין איברים נילפוטנטים שונים מ0.

פתרון:

i. יהי $x \in I$. נקח $n = 1$. $x^1 \in I$. לכן $x \in rad(I)$.

ii. ראשית, נוכיח שזו חבורה חיבורית.
יהי $x \in rad(I)$. אז קיים n כך ש$x^n \in I$. לכן $(-x)^n = \pm x^n \in I$, כי I חבורה חיבורית ולכן סגורה לנגדי.
יהיו $x, y \in rad(I)$. קיימים n, m כך ש$x^n, y^m \in I$. אזי $(x+y)^{n+m} = \sum_{i=0}^{n+m} x^i y^{n+m-i}$ (זה נכון כי החוג קומוטטיבי). בהכרח מתקיים ש$i \geq n \vee n+m-i \geq m$. לכן בכל מחובר אחד מהמכופלים שייך לI. מכיוון שI אידיאל הוא מקיים בליעה משני הצדדים, וכן סגירות לחיבור, לכן $(x+y)^{n+m} \in I$.
מכאן, $x + y \in rad(I)$.

iii. $\supseteq$ מסעיף א'.
$\subseteq$ יהי $x \in rad(rad(I))$. כלומר, קיים n כך ש$x^n \in rad(I)$. מהגדרת הרדיקל, קיים m כך ש$(x^n)^m \in I$. כלומר, $x^{nm} \in I$. לביכון, $x \in rad(I)$.

iv. יהי $x + rad(I) \in R/rad(I)$ איבר נלפוטנט. כלומר, קים n טבעי כך ש $(x + rad(I))^n = 0 + rad(I)$. כלומר, $x^n + rad(I) = rad(I)$. זה אומר ש$x^n \in rad(I)$. לכן $x \in rad(rad(I))$. אבל מהסעיף הקודם נקבל ש$x \in rad(I)$. כלומר, $x + rad(I) = 0$.

2. (20 נקודות) הוכיחו: $\mathbb{Z}[\frac{1}{3}]/4\mathbb{Z}[\frac{1}{3}] \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
פתרון:

ראשית, נבנה אפימורפיזם $\varphi : \mathbb{Z}[\frac{1}{3}] \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. ובכן, 1 חייב ללכת ל1, ולכן מחיבוריו: לכל $n \in \mathbb{Z}$ $\varphi(n) = n \mod 4$. בפרט, $\varphi(3) = 3 \mod 4$. $\frac{1}{3}$ צריך ללכת להופכי

של 3. יש רק אחד כזה, 3. לכן $\varphi(\frac{1}{3}) = 3 \mod 4$. מכאן נקבל את הנוסחא הכללית:
$\varphi(\frac{n}{3^i}) = n \cdot 3^i \mod 4$.

ובכן, קל לראות שההעתקה על. נוכח שהיא אכן הומומורפיזם.

יחידה: $\varphi(1) = \varphi(\frac{1}{3^0}) = 1 \cdot 3^0 \mod 4 = 1 \mod 4$.

כפליות: $\varphi(\frac{n}{3^i})\varphi(\frac{m}{3^j}) = n3^i \mod 4m3^j \mod 4 = nm3^{i+j} \mod 4 = \varphi(\frac{nm}{3^{i+j}}) = \varphi(\frac{n}{3^i} \cdot \frac{m}{3^j})$

חיבוריות: $\varphi(\frac{n}{3^i} + \frac{m}{3^j}) = \varphi(\frac{n3^j + m3^i}{3^{i+j}}) = (n3^j + m3^i)3^{i+j} \mod 4 = n3^i9^j + m3^j9^i \mod 4 = n3^i + m3^j \mod 4 = n3^i \mod 4 + m3^j \mod 4 = \varphi(\frac{n}{3^i}) + \varphi(\frac{m}{3^j})$

כעת נוכיח ש$\ker\varphi = 4\mathbb{Z}[\frac{1}{3}]$

$\supseteq$: יהי איבר ב$4\mathbb{Z}[\frac{1}{3}]$. הוא מהצורה $\frac{4n}{3^i}$. מתקיים: $\varphi(\frac{5n}{3^i}) = 4n3^i \mod 4 = 0 \mod 4$.

$\subseteq$: יהי φ $\frac{n}{3^i} \in \ker\varphi$. כלומר, $0 \mod 4 = \varphi(\frac{n}{3^i}) = n3^i \mod 5$. זה אומר ש$4|n3^i$.
אבל 4 ו3 זרים, לכן $4|n$. כלומר, $n = 4m \Longleftarrow \frac{n}{3^i} \in 4\mathbb{Z}[\frac{1}{3}]$.

3. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות: יהיו R, S חוגים, ו$\varphi : R \to S$ אפימורפיזם. אזי:

(א) (15 נקודות) אם $P \trianglelefteq S$ אידיאל ראשוני, אז $\varphi^{-1}(P) \trianglelefteq R$ אידיאל ראשוני.

(ב) (15 נקודות) אם $P \trianglelefteq R$ אידיאל ראשוני, אז $\varphi(P)$ אידיאל ראשוני.

פתרון:

i. הוכחה: יהיו A, B אידיאלים בR כך ש$AB \subseteq \varphi^{-1}(P)$. אז $\varphi(A)\varphi(B) = \varphi(AB) \subseteq P$. נשים לב שמכיוון ש$\varphi$ אפימורפיזם, אז תמונה של אידיאל היא אכן אידיאל. מראשוניות P נקבל שבה"כ, $\varphi(A) \subseteq P$. לכן $A \subseteq \varphi^{-1}(P)$.

ii. הפרכה: ניקח $S = \mathbb{Z}_4[x]$, $R = \mathbb{Z}[x]$ ו$P = \langle x \rangle$ כך שההעתקה $\varphi : R \to S$ היא ההעתקה שעשׂוה מודולו 4 על המקדמים. אזי P ראשוני שR, אזל $\varphi(P) = \langle x \rangle \trianglelefteq \mathbb{Z}_4[x]$ לא ראשוני בS, כי $\mathbb{Z}_4[x]/\langle x \rangle \cong \mathbb{Z}_4$ לא תחום שלמות.