תרגיל 7 - פתרון.

שאלה 1

(1) יהי $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L > 0$. לפי ההגדרה (ניקח $\varepsilon=\frac{L}{2}$),

נקבל שקיים x_0 כך שאם $x>x_0$: $\frac{1}{2}L = L-\frac{L}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < L+\frac{L}{2} = \frac{3}{2}L$.

לכן קבלנו: (א) $0<f(x)<\frac{3}{2}Lg(x)$ (נתון ש- $0<g(x)$)

(ב) $0<g(x)<\frac{2}{L}f(x)$

אם אינטגרל $\int_a^\infty f(x)\,dx$ מתכנס, אז לפי מבחן ההשוואה לפי (ב)
נקבל שגם $\int_a^\infty g(x)\,dx$ מתכנס.

אם $\int_a^\infty g(x)\,dx$ מתכנס אז לפי מבחן ההשוואה לפי (א),
גם $\int_a^\infty f(x)\,dx$ מתכנס.

(2) יהי $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. לכל ε קיים מספר x_0 כך שאם $x>x_0$
אז $\frac{f(x)}{g(x)} < \varepsilon$. ניקח $\varepsilon=1$, ונקבל: $g(x)>f(x)>0$.

לכן, אם $\int_a^\infty g(x)\,dx$ מתכנס, גם $\int_a^\infty f(x)\,dx$ מתכנס.

אבל הטענה ההפוכה אינה נכונה. לדוגמא:

$g(x)=1$, $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$,

אבל $\int_1^\infty f(x)\,dx$ מתכנס, ואילו $\int_1^\infty g(x)\,dx$ מתבדר.

שאלה 2

(1) א. הטענה אינה נכונה. דוגמא נגדית: $f(x)=\frac{\sin x}{x}$, $g(x)=\sin x$

אז $\int_1^\infty f(x)\,dx$ מתכנס לפי מבחן דיריכלה, והאינטגרל:

$\int_1^\infty f(x)g(x) = \int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$ מתבדר (כפי שהראינו בתרגול)

ב. הטענה נכונה. הוכחה:

לפי הנתון, קיים M כך ש- $|g(x)|<M$ לכל $x\in[a,\infty)$,

לכן: $|f(x)g(x)| \leq M|f(x)|$.

אולם נתון ש- $\int_a^\infty |f(x)|dx$ מתכנס, ולכן $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$

מתכנס בהחלט (לפי מבחן ההשוואה), ולכן - מתכנס (משפט קושי).

(2) נבדוק לפי המקרים:

א. אם $\alpha=1$:
$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} = \overset{\text{הצבה:}}{\begin{bmatrix} \ln x = t \\ dt = \frac{dx}{x}\end{bmatrix}} = \int_{\ln 2}^\infty \frac{dt}{t^\beta}$$

ולכן האינטגרל מתכנס אמ"מ $\beta>1$.

ב. אם $\alpha<1$: נסמן, $g(x):=\frac{1}{x^{\frac{\alpha+1}{2}}}$, $f(x)=\frac{1}{x^\alpha(\ln x)^\beta}$,

אז:
$$(*) \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^{\frac{\alpha+1}{2}}}}{\frac{1}{x^\alpha(\ln x)^\beta}} = \lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^\beta}{x^{\frac{1-\alpha}{2}}}$$

טענה: לכל $\varepsilon>0$ ו- c: $\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^c}{x^\varepsilon}=0$

הוכחה: לפי כלל לופיטל:
$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^c}{x^\varepsilon} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{c}{x}(\ln x)^{c-1}}{\varepsilon x^{\varepsilon-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{c}{\varepsilon}\cdot\frac{(\ln x)^{c-1}}{x^\varepsilon}$$

וממשיכים באותו אופן n פעמים, עד ש- $c-n\leq 0$, ואז - הגבול שווה ל-0. (עבור $c\leq 0$, אז כבר הגבול המבוקש שווה ל-0 ואין צורך בכלל לופיטל).

כעת ניקח $c:=\beta$, $\varepsilon:=\frac{1-\alpha}{2}>0$, אז לפי הטענה ולפי $(*)$

נקבל ש- $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=0$ ולכן קיים x_0 כך שלכל $x>x_0$ $\frac{g(x)}{f(x)}<1$, כלומר,

$0<g(x)<f(x)$ (כמובן g,f הן פונ' חיוביות ב- $[2,\infty)$).

אבל, $\frac{\alpha+1}{2}<1$ ולכן $\int_{x_0}^\infty g(x)dx$ מתבדר, ומכאן (לפי מבחן ההשוואה) שגם $\int_{x_0}^\infty f(x)dx$ מתבדר.

ג. אם $\alpha > 1$: נבחר f, g כמו במקרה ב. , אז לפי הטענה

מסעיף ב. , עבור: $c := -\beta$, $\varepsilon = \frac{\alpha-1}{2} > 0$, נקבל:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}}}{\frac{1}{x^{\frac{\alpha+1}{2}}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^{-\beta}}{x^{\frac{\alpha-1}{2}}} = 0$$

והרי $\int_2^\infty g(x)dx$ מתכנס כי $1 < \frac{\alpha+1}{2}$, ולכן (לפי מבחן ההשוואה הגבולי)

גם $\int_2^\infty f(x)\,dx$ מתכנס.

<u>מסקנה סופית:</u> האינטגרל הנתון מתכנס אמם $(\alpha > 1)$ <u>או</u> ($\alpha = 1$ וגם $\beta > 1$).