פונקציות מרוכבות
תרגיל בית מס' 3

1. א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(z)=\log(z^2+1)$ כאשר $\log$ מסמן את הענף העיקרי של הלוגריתם.
ב. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $\sqrt{\log(z+1)}$ כאשר $\log$ מסמן את הענף העיקרי של הלוגריתם ו- $\sqrt{z}$ $z\mapsto$ מסמן את הענף המתאים לארגומנט $0<Arg(z)<2\pi$.

2. חשבו : $(1+i)^i,\ (-i)^{-i},\ \operatorname{Re}((1-i)^{1+i})$.

3. א. הוכיחו את השוויונות : $\cos\Big(\frac{1}{i}\ln(z+\sqrt{z^2-1})\Big)=z$, $\cot\Big(\frac{1}{2i}\ln\big(\frac{z+i}{z-i}\big)\Big)=z$.
ב. פתרו את המשוואה $\sin z=2$.

4. א. הוכיחו כי אם $\log_{R_1},\log_{R_2}$ הם שני ענפים של הלוגריתם המתאימים לתחומים היסודיים R_1,R_2 ואם z הוא מספר מרוכב הנמצא בתחום ההגדרה של שני הענפים האלו אז קיים k שלם כך ש- $\log_{R_1}(z)=\log_{R_2}(z)+2\pi ik$.
ב. הוכיחו כי אם z_1,z_2 הם שני מספרים מרוכבים המקיימים $-\frac{\pi}{2}<Arg(z_1),Arg(z_1)<\frac{\pi}{2}$ אז $\log(z_1z_2)=\log(z_1)+\log(z_2)$ כאשר $\log$ מסמן את הענף העיקרי של הלוגריתם.

5. נניח כי $\log$ הוא הענף העיקרי של הלוגריתם ו- $\log_R$ הוא הענף המתאים לארגומנט $0<Arg(z)<2\pi$. (כלומר R מסמן את התחום $0<\operatorname{Im}(z)<2\pi$)
א. הוכיחו כי $\log(1/z)=-\log(z)$ לכל z בתחום ההגדרה של $\log$.
ב. תנו דוגמא למספר מרוכב z המקיים $\log_R(1/z)\neq-\log_R(z)$.

6. תהי $u(x,y)=e^x\left(x\cos y-y\sin y\right)$. מצא פונקציה הרמונית צמודה ל- u

7. מצא את כל הפונקציות ההרמוניות האפשריות מסוג $u(x,y)=\varphi\left(x^2-y^2\right)$. במילים אחרות מצא את התבנית לפונקציה (ממשית) φ .

פתרונות

1. א. עלינו למצוא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(z)=\log(z^2+1)$. ניזכר שתחום ההגדרה של הפונקציה $g(z)=\log(z)$ הוא התחום $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$. לכן נבדוק מתי $z^2+1\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$. $z^2+1\notin\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ אם ורק אם קיים $\lambda\in\mathbb{R}$ כך ש-$z^2+1=-\lambda^2$, כלומר $z^2=-1-\lambda^2$. לכן $z=\pm i\sqrt{-1-\lambda^2}$. כיוון ש-$\lambda$ עובר על כל $\mathbb{R}$, הביטוי $z=\pm i\sqrt{-1-\lambda^2}$ יעבור על התחום $R=\{(0,t^2+1)\mid t\in\mathbb{R}\}\cup\{(0,-t^2-1)\mid t\in\mathbb{R}\}=\{iy\mid y\geq 1 \text{ or } y\leq -1\}\subset\mathbb{C}$. לכן תחום ההגדרה של הפונקציה $f(z)=\log(z^2+1)$ הוא $\mathbb{C}\setminus R$.

ב. עלינו למצוא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(z)=\sqrt{\log(z+1)}$. קודם יש למצוא את תחום ההגדרה של הפונקציה $\log(z+1)$. כיוון שתחום ההגדרה של הפונקציה $\log(z)$ הוא התחום $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ נובע שתחום ההגדרה של $\log(z+1)$ הוא $\mathbb{C}\setminus(-\infty,-1]$. לפי הגדרת פונקצית השורש המתאימה לענף עם הארגומנט $0<Arg(z)<2\pi$ נקבל:

$\sqrt{\log(z+1)}=\exp\left(\frac{1}{2}\log_R(\log(z+1))\right)$ כאשר R מסמן את התחום $0<\mathrm{Im}(z)<2\pi$. לכן יש לבדוק עבור אילו ערכי z הפונקציה $\log_R(\log(z+1))$ מוגדרת. הפונקציה $\log_R$ מוגדרת בתחום $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$ ולכן נבדוק מתי $\log(z+1)\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$. $\log(z+1)\notin\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$ אם ורק אם קיים $\lambda\in\mathbb{R}$ כך ש-$\log(z+1)=\lambda^2$, כלומר $\ln|z+1|+iArg(z+1)=\lambda^2$. לכן $Arg(z+1)=0$ ששקול לכך ש-$Arg(z)=0,-\pi$ ו-$\ln|z+1|\geq 0$ ששקול לכך ש-$|z+1|\geq 1$. לכן z נמצא על הציר הממשי ומקיים $|z+1|\geq 1$. כיוון ש-$z>-1$ (אחרת z לא נמצא בתחום ההגדרה של הפונקציה $\log(z+1)$) נובע ש-$z+1=|z+1|\geq 1$ ולכן $z\geq 0$. כלומר יש להוציא את ערכי z הממשיים המקיימים $z\geq 0$ וגם את ערכי z הנמצאים בתחום $(-\infty,-1]$ (שבהם הפונקציה $\log(z+1)$ איננה מוגדרת). לכן תחום ההגדרה של הפונקציה $f(z)=\sqrt{\log(z+1)}$ הוא $\mathbb{C}\setminus((-\infty,-1]\cup[0,\infty))$.

2. $$(1+i)^i=\exp(i(\ln(1+i))=\exp(i(\log(1+i)+2\pi ik)=\exp(i(\ln\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4}+2\pi ik))$$

$$=\exp(i(\ln\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4}+2\pi ik))=e^{-\frac{\pi}{4}-2\pi k}(\cos\ln\sqrt{2}+i\sin\ln\sqrt{2}).$$

$$(-i)^{-i}=\exp(-i\ln(-i))=\exp(-i(\log(-i)+2\pi ik))=\exp(-i(-i\frac{\pi}{2}+2\pi ik))=$$
$$=\exp(-\frac{\pi}{2}+2\pi k).$$

$$\mathrm{Re}\left((1-i)^{1+i}\right)=\mathrm{Re}\left(\exp((1+i)\ln(1-i))\right)=\mathrm{Re}\left(\exp((1+i)(\log(1-i)+2\pi ik))\right)=$$
$$\mathrm{Re}\left(\exp((1+i)(\ln\sqrt{2}-i\frac{\pi}{4}+2\pi ik))\right)=\mathrm{Re}\left(\exp(\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}-2\pi k+i(\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}+2\pi k))\right)=$$
$$e^{\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}-2\pi k}\cos(\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}+2\pi k)=e^{\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}-2\pi k}\cos(\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}).$$

3. נוכיח את השוויון $\cos\left(\frac{1}{i}\ln(z+\sqrt{z^2-1}\right)=z$. ע"פ הגדרת $\cos$ נקבל

$$\cos\left(\frac{1}{i}\ln(z+\sqrt{z^2-1})\right)=\frac{1}{2}\left(\exp\left(i\frac{1}{i}\ln(z+\sqrt{z^2-1})\right)+\exp\left(-i\frac{1}{i}\ln(z+\sqrt{z^2-1})\right)\right)=$$
$$\frac{1}{2}\left(\exp\left(\ln(z+\sqrt{z^2-1})\right)+\exp\left(\ln(z+\sqrt{z^2-1})\right)^{-1}\right)=\frac{1}{2}\left(z+\sqrt{z^2-1}+\frac{1}{z+\sqrt{z^2-1}}\right)=$$
$$\frac{1}{2}\left(z+\sqrt{z^2-1}+z-\sqrt{z^2-1}\right)=z$$

נוכיח את השוויון $\cot\left(\frac{1}{2i}\ln\left(\frac{z+i}{z-i}\right)\right)=z$:

$$\cot\left(\frac{1}{2i}\ln\left(\frac{z+i}{z-i}\right)\right)=\frac{\cos\left(\frac{1}{2i}\ln\left(\frac{z+i}{z-i}\right)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2i}\ln\left(\frac{z+i}{z-i}\right)\right)}=i\frac{\exp\left(i\frac{1}{2i}\ln\left(\frac{z+i}{z-i}\right)\right)+\exp\left(-i\frac{1}{2i}\ln\left(\frac{z+i}{z-i}\right)\right)}{\exp\left(i\frac{1}{2i}\ln\left(\frac{z+i}{z-i}\right)\right)-\exp\left(-i\frac{1}{2i}\ln\left(\frac{z+i}{z-i}\right)\right)}=$$
$$i\frac{\exp\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{z+i}{z-i}\right)\right)+\exp\left(-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{z+i}{z-i}\right)\right)}{\exp\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{z+i}{z-i}\right)\right)-\exp\left(-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{z+i}{z-i}\right)\right)}=i\frac{\exp\left(\ln\left(\frac{z+i}{z-i}\right)\right)+1}{\exp\left(\ln\left(\frac{z+i}{z-i}\right)\right)-1}$$

כאשר במעבר האחרון המונה והמכנה הוכפלו ב- $\exp\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{z+i}{z-i}\right)\right)$. לכן

$$\cot\left(\frac{1}{2i}\ln\left(\frac{z+i}{z-i}\right)\right)=i\frac{\exp\left(\ln\left(\frac{z+i}{z-i}\right)\right)+1}{\exp\left(\ln\left(\frac{z+i}{z-i}\right)\right)-1}=i\frac{\frac{z+i}{z-i}+1}{\frac{z+i}{z-i}-1}=i\frac{z+i+z-i}{z+i-z+i}=z\,\cdot$$

נפתור את המשוואה $\sin z=2$. נסמן $z=x+iy$ ונקבל

$$\sin(x+iy)=\frac{1}{2i}\left(e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}\right)=\frac{1}{2i}\left(e^{-y+ix}-e^{y-ix}\right)=\frac{1}{2i}\left(e^{-y}(\cos(x)+i\sin(x))\right.$$
$$\left.-e^{y}(\cos(x)-i\sin(x)\right)=\frac{1}{2}\left(e^{-y}+e^{y}\right)\sin(x)-\frac{i}{2}\left(e^{-y}-e^{y}\right)\cos(x)=2$$

לכן $\left(e^{-y}-e^{y}\right)\cos(x)=0$ ו- $\left(e^{-y}+e^{y}\right)\sin(x)=4$. מהמשוואה $\left(e^{-y}-e^{y}\right)\cos(x)=0$ נקבל ש- $y=0$ או ש- $x=\pi k+\frac{\pi}{2}$. אם $y=0$ אז $\sin(x)=2$ וזה לא יתכן. לכן $x=\pi k+\frac{\pi}{2}$ ומזה נקבל ש- $\left(e^{-y}+e^{y}\right)(-1)^k=4$ לכן k הוא מספר זוגי ומכאן נקבל את המשוואה $e^{-y}+e^{y}=4$ ששקולה ל- $e^{2y}-4e^{y}+1=0$. נסמן $t=e^{y}$ ונקבל $t^2-4t+1=0$. לכן $t=2\pm\sqrt{3}$. לכן $y=\ln(2\pm\sqrt{3})$. לסיכום, הפתרון של המשוואה $\sin z=2$ הוא $z=\frac{\pi}{2}+2\pi k+i\ln(2\pm\sqrt{3})$.

4. א. נניח ש- z הוא מספר מרוכב הנמצא בתחום ההגדרה של שני הענפים $\log_{R_1}, \log_{R_2}$. אז כיוון ש- $\log_{R_1}$ ו- $\log_{R_2}$ הן הפונקציות ההפוכות של $\exp$ בתחומים R_1 ו- R_2 בהתאמה וכיוון ש- z נמצא בתחום ההגדרה של שני הענפים האלו נובע ש- $\exp(\log_{R_1}(z)) = z,\ \exp(\log_{R_2}(z)) = z$. לכן $\exp(\log_{R_2}(z)) = \exp(\log_{R_1}(z))$ ולכן $\exp(\log_{R_1}(z) - \log_{R_2}(z)) = 1$. כיוון שהפתרון של המשוואה $\exp(w) = 1$ הוא $w = 2\pi ik$ נובע ש- $\log_{R_1}(z) - \log_{R_2}(z) = 2\pi ik$ עבור k שלם.

ב. אם z_1, z_2 הם שני מספרים מרוכבים המקיימים $-\frac{\pi}{2} < Arg(z_1), Arg(z_1) < \frac{\pi}{2}$. אז כיוון ש- $Arg(z_1 z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2)$ נובע ש- $-\pi < Arg(z_1 z_2) < \pi$ ולכן הארגומנט של $z_1 z_2$ נמצא בין $-\pi$ ל- π.

5. א. נוכיח ש- $\log(1/z) = -\log(z)$. לפי ההגדרה $\log(z) = \ln|z| + iArg(z)$ ולכן $-\log(z) = -\ln|z| - iArg(z)$. מצד שני $\log(1/z) = \ln|1/z| + iArg(1/z)$ $= -\ln|z| + iArg(1/z)$. לכן צריך להוכיח ש- $Arg(1/z) = -Arg(z)$ כאשר הארגומנטים של $1/z$ ו- z נלקחים בין $-\pi$ ל- π. אכן, כיוון ש- $-\pi < Arg(z) < \pi$ גם $-\pi < -Arg(z) < \pi$. לכן גם $-Arg(z)$ וגם $Arg(1/z)$ נמצאים בין $-\pi$ ל- π. אם נוכיח שההפרש ביניהם הוא מספר מהצורה $2\pi k$ אז נוכיח ש- $Arg(1/z) = -Arg(z)$. אכן, כיוון ש- $e^{\log(1/z)} = \frac{1}{z},\ e^{-\log(z)} = \frac{1}{e^{\log z}} = \frac{1}{z}$ נובע ש- $e^{\log(1/z)} = e^{-\log(z)}$ ומתכונות הפונקציה $\exp$ קיים מספר שלם k כך ש- $\log(1/z) = -\log(z) + 2\pi ik$. לכן נקבל את השוויון: $\ln|1/z| + iArg(1/z) = -\ln|z| - iArg(z) + 2\pi ik$ כלומר קיבלנו את השוויון $iArg(1/z) = -iArg + 2\pi ik$ וזה מוכיח את הטענה.

ב. נבחר למשל $z = i$ אז $Arg(i) = \pi/2$, לכן $\log_R(i) = \ln|i| + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}$ ולכן $-\log_R(i) = -i\frac{\pi}{2}$. מצד שני $Arg(1/i) = Arg(-i) = \frac{3\pi}{2}$ (כאשר אנו בוחרים את הארגומנט הנמצא בין 0 ל- 2π) ולכן $\log_R(1/i) = i\frac{3\pi}{2}$ ששונה מהערך של $-\log_R(i)$.

.6

ראשית, נבדוק באיזה תחום הפונק' u היא הרמונית.

$$u_x = e^x\left(x\cos y - y\sin y\right) + e^x\left(\cos y\right) = e^x\left(x\cos y - y\sin y + \cos y\right)$$
$$u_{xx} = e^x\left(x\cos y - y\sin y + \cos y\right) + e^x\left(\cos y\right) = e^x\left(x\cos y - y\sin y + 2\cos y\right)$$
$$u_y = e^x\left(-x\sin y - \sin y - y\cos y\right)$$
$$u_{yy} = e^x\left(-x\cos y - \cos y - \cos y + y\sin y\right) = -e^x\left(x\cos y - y\sin y + 2\cos y\right)$$
$$\Downarrow$$
$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ לכל } x, y$$

כעת נמצא פונק' הרמונית צמודה ל-u, ע"י שימוש בתנאי קושי-רימן:

$$v_y = u_x = e^x\left(x\cos y - y\sin y + \cos y\right)$$
$$\Downarrow$$
$$v = \int e^x\left(x\cos y - y\sin y + \cos y\right)dy + c(x) =$$
$$= e^x\left[x\int\cos y dy - \int y\sin y dy + \int\cos y dy\right] + c(x) =$$
$$= e^x\left[x\sin y - \left(-y\cos y + \sin y\right) + \sin y\right] + c(x) =$$
$$= e^x\left[x\sin y + y\cos y\right] + c(x)$$
$$\Downarrow$$
$$v_x = e^x\left(x\sin y + y\cos y\right) + e^x\left(\sin y\right) + c'(x) =$$
$$= e^x\left(x\sin y + y\cos y + \sin y\right) + c'(x)$$

כמו כן, $u_y = -e^x\left(x\sin y - \sin y - y\cos y\right)$, ושוב מתנאי קושי-רימן, נסיק כי בהכרח מתקיים - $c'(x) = 0$.

ולכן נסיק כי הפונק' $v(x,y) = e^x\left(x\sin y + y\cos y\right)$ היא הרמונית צמודה ל-v.

.7

$\varphi(t)$ היא פונקציה ממשית של משתנה אחד, ההופכת לפונקציה ממשית של שני משתנים ע"י הצבת הארגומנט $t = x^2 - y^2$. מתנאי ההרמוניות $\Delta u = 0$ נקבל משוואה דיפרנציאלית עבור $\varphi(t)$:

$$u(x,y) = \varphi(x^2 - y^2)$$
$$u_x = \varphi'(x^2 - y^2)\cdot 2x, \qquad u_{xx} = \varphi''(x^2 - y^2)\cdot 4x^2 + \varphi'(x^2 - y^2)\cdot 2$$
$$u_y = \varphi'(x^2 - y^2)\cdot(-2y), \qquad u_{yy} = \varphi''(x^2 - y^2)\cdot 4y^2 + \varphi'(x^2 - y^2)\cdot(-2)$$

$$\Delta = u_{xx} + u_{yy} = 4x^2\varphi''(x^2 - y^2) + 2\varphi'(x^2 - y^2) + 4y^2\varphi''(x^2 - y^2) - 2\varphi'(x^2 - y^2) = 4(x^2 + y^2)\varphi''(x^2 - y^2) = 0$$

השוויון האחרון אמור להתקיים באיזה שהוא תחום 2D , אז יש אפשרות אחד בלבד :

$$x^2 - y^2 = t: \quad \varphi''(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = At + B$$
$$u(x,y) = A\left(x^2 - y^2\right) + B$$