פתרון תרגיל 1 בדידה

1. (א) הטבלה נראית כך:

$(P \vee Q) \to R$	$P \vee Q$	R	Q	P
T	T	T	T	T
F	T	F	T	T
T	T	T	F	T
T	T	T	T	F
F	T	F	F	T
F	T	F	T	F
T	F	T	F	F
T	F	F	F	F

(ב) כדי להראות ששני הפסוקים שקולים לוגית, נראה שערכי האמת שלהם זהים.

$P \wedge (Q \wedge R)$	$Q \wedge R$	$(P \wedge Q) \wedge R$	$P \wedge Q$	R	Q	P
T	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	F	T	T
F	F	F	F	T	F	T
F	T	F	F	T	T	F
F	F	F	F	F	F	T
F	F	F	F	F	T	F
F	F	F	F	T	F	F
F	F	F	F	F	F	F

וערכי האמת אכן זהים.

(ג) בדומה לסעיף הקודם:

$(P \wedge Q) \to R$	$P \wedge Q$	$P \to (Q \to R)$	$Q \to R$	R	Q	P
T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	T
T	F	T	T	T	F	T
T	F	T	T	T	T	F
T	F	T	T	F	F	T
T	F	T	F	F	T	F
T	F	T	T	T	F	F
T	F	T	T	F	F	F

וערכי האמת אכן זהים.

(ד) נראה שקיימת השמה שבה ערכי האמת שונים:

$Q \to P$	$P \to Q$	Q	P
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	F
T	T	F	F

כבר בשורה שנייה קיבלנו ערכי אמת שונים. הפסוקים אינם שקולים.

2. ראשית, נחשב את ערכי האמת של הפסוק שלנו:

$P \to (Q \vee R)$	$Q \vee R$	R	Q	P
T	T	T	T	T
T	T	F	T	T
T	T	T	F	T
T	T	T	T	F
F	F	F	F	T
T	T	F	T	F
T	T	T	F	F
T	F	F	F	F

שנית, פסוק ד הוא טאוטולוגיה ולכן נגרר מהפסוק שלנו (אך לא שקול לא כי הפסוק אינו טאוטולוגיה). פסוק ה הוא סתירה ולא נגרר מהפסוק שלנו ולא שקול לו.

כעת, נחשב את ערכי האמת של שאר הפסוקים:

$(P \wedge \neg Q) \to R$	$P \wedge \neg Q$	R	Q	P
T	F	T	T	T
T	F	F	T	T
T	T	T	F	T
T	F	T	T	F
F	T	F	F	T
T	F	F	T	F
T	F	T	F	F
T	F	F	F	F

ופסוק ג שקול לפסוק שלנו.

$(\neg R \wedge \neg Q) \to \neg P$	$\neg R \wedge \neg Q$	R	Q	P
T	F	T	T	T
T	F	F	T	T
T	F	T	F	T
T	F	T	T	F
F	T	F	F	T
T	F	F	T	F
T	F	T	F	F
T	T	F	F	F

ופסוק א שקול לפסוק שלנו.

$(P \to Q) \vee (P \to R)$	$P \to Q$	$P \to R$	R	Q	P
T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T
T	F	T	T	F	T
T	T	T	T	T	F
F	F	F	F	F	T
T	T	T	F	T	F
T	T	T	T	F	F
T	T	T	F	F	F

וגם פסוק ב שקול לפסוק שלנו.

3. (א) נתבונן בפסוק $\neg P \wedge \neg Q$:

$\neg P \wedge \neg Q$	$\neg(P \vee Q)$	Q	P
F	F	T	T
F	F	F	T
F	F	T	F
T	T	F	F

ערכי האמת שווים ולכן הפסוקים שקולים.

(ב) נתבונן בפסוק $\neg(P \wedge Q)$:

$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P \vee \neg Q$	Q	P
F	F	T	T
T	T	F	T
T	T	T	F
T	T	F	F

ערכי האמת שווים ולכן הפסוקים שקולים.

שקילויות אלו מכונות **חוקי דה-מורגן**.

4. נוכיח באמצעות הכלה דו-כיוונית.
לכיוון הראשון, יהי $x \in (A \cap B)^c$. מהגדרת משלים, $\neg(x \in A \cap B)$. מהגדרת איחוד, $\neg((x \in A) \wedge (x \in B))$ לפי דה-מורגן (מהשאלה הקודמת), נקבל: $\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)$. מהגדרת משלים, $(x \in A^c) \vee (x \in B^c)$, ומהגדרת איחוד נקבל שאכן $x \in A^c \cup B^c$.
לכיוון השני, יהי $x \in A^c \cup B^c$. מהגדרת איחוד, $(x \in A^c) \vee (x \in B^c)$. מהגדרת משלים, $\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)$. לפי דה-מורגן, $\neg((x \in A) \wedge (x \in B))$. מהגדרת חיתוך, $\neg(x \in A \cap B)$ ומהגדרת משלים $x \in (A \cap B)^c$ כנדרש.
שימו לב שיכולנו לרשום את שני הכיוונים בבת אחת באמצעות הקשר ”אם ורק אם”.

5. (א) לא. למשל, $A = \{1\}$ מקיימת $\emptyset \subseteq A$ אך $A \neq \emptyset$.

(ב) כן. $A \subseteq \emptyset$, ולכן אם ב$-A$ היה איבר כלשהו, הוא גם נמצא בקבוצה הריקה, אך בקבוצה הריקה אין איברים ולכן גם ב$-A$ אין איברים, כלומר $A = \emptyset$.

(ג) כן. הפסוק $x \in A \cap A^c$ הוא סתירה, ולכן גם הפסוק $x \in A$ הוא סתירה. כלומר, אין איבר בקבוצה A ולכן $A = \emptyset$.

(ד) כן. אם נבחר $B=\emptyset$ נקבל $A\cap\emptyset=A$, כלומר $A=\emptyset$.

(ה) לא. למשל, $A=B=\{1\}$ מקיימות $A\cap B=A$ אך $A\neq\emptyset$.

6. (א) הפרכה. נתבונן למשל בקבוצות: $A=B=\{1\}$. $A=\{1\}$ אך $(A\cup B)\setminus B=\{1\}\setminus\{1\}=\emptyset$, כלומר $(A\cup B)\setminus B\neq A$.

(ב) הפרכה. נתבונן למשל בקבוצות: $A=\{1,2\},B=\{1,2,3\},C=\{1,3\}$. $A\subseteq B$ וגם $A\not\subseteq C$, אך $B\backslash C=\{2\}$ ולכן לא מתקיים $A\subseteq(B\backslash C)$.

(ג) הפרכה. נתבונן למשל בקבוצות: $A=\{1\},B=\{1,2\},C=\{1,3\}$. $A\subseteq B$ אך לא מתקיים $C\subseteq B$.

(ד) הטענה נכונה:

$$C\in P(A\cap B)\iff C\subseteq A\cap B\iff C\subseteq A\wedge C\subseteq B\iff$$

$$\iff C\in P(A)\wedge C\in P(B)\iff C\in P(A)\cap P(B)$$

השתמשנו בהגדרת חיתוך ובהגדרת קבוצת החזקה.

(ה) הטענה נכונה. אם $A\backslash B=\emptyset$, פירוש הדבר שלא קיים x המקיים: $x\in A\wedge x\notin B$. כלומר, $x\in A\to x\in B$, ולכן $A\subseteq B$.

7. (א) לא. לקבוצה $P(A)$ תמיד יש מספר זוגי של איברים.

(ב) כן, למשל: $A=\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$. $\emptyset\in P(A)$ בכל מקרה; $\emptyset\in A\to\{\emptyset\}\in P(A)$ וגם $\emptyset,\{\emptyset\}\in A\to\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\in P(A)$.
לכן $A\subseteq P(A)$.