

תרגיל בית 2 - אנליזה למורים

שאלה 1

מצא את הגבול של הסדרה הבאה: $b_n = -2 \cdot n^5 + 3 \cdot n^4 - 3 \cdot n^3 + n - 2$

פתרון: נוציא את חזקה הכי גדולה של n כגורם משותף ונקבל:

$$n^5 \left(-2 + \frac{3}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^4} - \frac{2}{n^5} \right) = -\infty$$

שאלה 2

מצא את הגבול של הסדרה הבאה:

$$a_n = \sqrt{5n^6 + n^3 + n^2 + 2n} - \sqrt{5n^6 - n^3 - n^2 - 2n - 2}$$

פתרון: נכפול בצמוד את המונה ומכנה ונקבל את הביטוי הבא:

$$\frac{5 \cdot n^6 + n^3 + n^2 + 2n - (5n^6 - n^3 - n^2 - 2n - 2)}{\sqrt{5n^6 + n^3 + n^2 + 2n} + \sqrt{5n^6 - n^3 - n^2 - 2n - 2}} = \frac{n^2 \left(1 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2} \right)}{n^3 \left(\sqrt{5 + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} + \frac{2}{n^5}} + \sqrt{5 - \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4} - \frac{2}{n^5} - \frac{2}{n^6}} \right)}$$

בביטוי שהתקבל אחרי שוויון אחרון הוצאנו את החזקה הכי גדולה של n כגורם משותף גם במונה וגם במכנה. עכשיו נצמצם את n^2 ונקבל $\frac{1}{n}$ כפול סדרה ששואפת ל- $\frac{1}{2\sqrt{5}}$ ולכן הגבול הוא אפס.

שאלה 3

מצא את הגבול של הסדרה הבאה:

$$a_n = \sqrt[3]{3n^6 + n^4 - 2n - 1} - \sqrt[3]{3n^6 - n^4 + 2n + 3}$$

רמז: השתמשו בנוסחת כפר המקוצר הבאה: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

פתרון: נכפול ונחלק את a_n במספר $(\sqrt[3]{3n^6 + n^4 - 2n - 1})^2 + \sqrt[3]{(3n^6 + n^4 - 2n - 1)(3n^6 - n^4 + 2n + 3)} + (\sqrt[3]{3n^6 - n^4 + 2n + 3})^2$ ונקבל את ביטוי הבא:

כמו בדוגמאות הקודמות נוציא מהמונה ומהמכנה את $\frac{3n^6 + n^4 - 2n - 1 - (3n^6 - n^4 + 2n + 3)}{(\sqrt[3]{3n^6 + n^4 - 2n - 1})^2 + \sqrt[3]{(3n^6 + n^4 - 2n - 1)(3n^6 - n^4 + 2n + 3)} + (\sqrt[3]{3n^6 - n^4 + 2n + 3})^2}$. החזקה הכי גדולה של n : במונה ובמכנה זה n^4 . נצמצם את n^4 ונקבל את הביטוי ששואף ל- $3\sqrt[3]{9}$.

שאלה 4

נחשו את הגבול של הסדרה $a_n = \frac{5n+3}{3n}$ והוכיחו שזה אכן הגבול

פתרון:
 תרשום $\frac{5n+3}{3n} = \frac{5}{3} + \frac{1}{n}$ ולכן ננחש שהגבול הוא $\frac{5}{3}$, נוכיח את זה:
 יהי $\epsilon > 0$, נרצה להראות שקיים $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N_\epsilon$ מתקיים $|a_n - \frac{5}{3}| < \epsilon$.
 ולכן אם מבחר $N_\epsilon = \frac{1}{\epsilon}$ נקבל שלכל $n > N_\epsilon$ ומשום ש- $\frac{1}{n} < \epsilon$ היה שרירותי זה נכון לכל $\epsilon > 0$ וזה מסיים את ההוכחה.

שאלה 5

תהי a_n סדרה המקיימת $a_n \rightarrow 0$ ותהי b_n סדרה שאין לה גבול (לא סופי ולא אינסופי).

הוכיחו באמצעות דוגמאות שלא ניתן לומר כלום על הגבול של סדרה $a_n \cdot b_n$:

הדרכה:

(1) תנו דוגמה לסדרות a_n, b_n המקיימות את הנתונים שעבורן $a_n \cdot b_n \rightarrow 0$

פתרון: נבחר $a_n = \frac{1}{n}$ ו- $b_n = (-1)^n$

(2) תנו דוגמה לסדרות a_n, b_n המקיימות את הנתונים שעבורן $a_n \cdot b_n \rightarrow 1$

פתרון: $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ ו- $b_n = (-1)^n \cdot n$

(3) תנו דוגמה לסדרות a_n, b_n המקיימות את הנתונים שעבורן אין גבול ל- $a_n \cdot b_n$

פתרון: $a_n = \frac{1}{n}$ ו- $b_n = (-1)^n \cdot n$