תורת הקבוצות־ תרגיל בית 10

14 בינואר 2018

1.א. תהי $A \subseteq \omega_1$ קבוצה. נגיד ש$\alpha \in \omega_1$ הוא נקודת סגור של A אם יש $\langle \beta_i | i < \omega \rangle \subseteq A$ סדרה עולה כך ש $\lim \beta_i = \alpha$. הוכח שקבוצת נקודות הסגור של קבוצה לא חסומה בω_1 הוא סל"ח.

ב. הוכח שהקבוצה: $A = \{\alpha \in \omega_1 | \omega^\alpha = \alpha\}$ היא סל"ח.

פתרון:

א. סגורה: תהי $\{\gamma_i\}_{i \in \omega}$ סדרה עולה של נקודות סגור של A. נוכיח ש$\gamma = \lim \gamma_i$ היא נקודת סגור של A. לצורך כך צריך לבנות סדרה בA שγ הוא הגבול שלה. ובכן, לכל γ_i יש סדרה $A \supseteq \{\gamma_{ij}\}_{j \in \omega}$ שהגבול שלה הוא γ_i. נגדיר סדרה באופן הבא: $\delta_0 = \gamma_{0,0}$. כעת, $\gamma_n < \gamma_{n+1}$ ולכן יש איבר ראשון בסדרה ששואפת לγ_{n+1} שגדול ממש מγ_n. האיבר הזה יהיה δ_{n+1} . כלומר, $\gamma_n < \delta_{n+1} < \gamma_{n+1}$. לכן $\lim \delta_n = \lim \gamma_n = \gamma$. וכן, לפי בניית הסדרה, $\{\delta_n\}_{n<\omega} \subseteq A$. לכן γ הוא נקודת גבול של A.

לא חסומה: יהי $\alpha < \omega_1$. A לא חסומה ולכן יש $\beta_0 \in A$ כך ש$\alpha < \beta_0$. נגדיר באינדוקציה סדרה באופן הבאה: $\beta_{n+1} = \min\{\gamma \in A, \gamma > \beta_n\}$. מוגדר היטב כי A לא חסומה. נקבל כי $\lim \beta_n$ גדול מα והוא נקודת סגור של A.

ב. סגורה: נניח $\{\alpha_i\}_{i \in \omega}$ סדרה עולה של סודרים בA. כלומר, לכל i , $\omega^{\alpha_i} = \alpha_i$. אזי $\omega^{\lim \alpha_i} = \lim \omega^{\alpha_i} = \lim \alpha_i$. כלומר, $\lim \alpha_i \in A$.

לא חסומה: הוכחנו בעבר שלכל α קיים $\beta > \alpha$ כך ש$\omega^\beta = \beta$. הדרך שעשינו הייתה לבנות את הסדרה: $\beta_0 = \alpha$, $\beta_{n+1} = \omega^{\beta_n}$. ו$\beta = \lim \beta_n$. נשאר רק להוכיח ש$\beta < \omega_1$. לצורך כך מספיק להוכיח שβ בן מניה. אם לכל n β_n הוא בן מניה, אז β הוא בן מניה כאיחוד בן מניה של קבוצות בנות מניה. אז נוכיח באינדוקציה שβ_n בן מניה. עבור $n = 0$, ברור. כעת נניח שβ_n בן מניה, צריך להוכיח ש$\beta_{n+1} = \omega^{\beta_n}$ בן מניה. למעשה צריך להוכיח שאם γ סודר בן מניה, אז ω^γ בן מניה. נוכיח באינדוקציה טרנספיניטית: עבור 0, ברור. נניח שעבור γ מתקיים ω^γ בן מניה, אז $\omega^{\gamma+1} = \omega^\gamma \cdot \omega$ איזומורפי סדר למכפלה הקרטזית $\omega^\gamma \times \omega$, ובפרט מאותה עוצמה. מכפלה של שתי קבוצות בנות מניה היא בת מניה.

כעת, נניח נכונות לכל $\gamma < \delta$ עבור δ גבולי, אז $\omega^\delta = \bigcup_{\gamma < \delta} \omega^\gamma$ איחוד בן מניה של קבוצות בנות מניה.

2. הוכח/ הפרך: לכל $A \subseteq \omega_1$ מתקיים: A סל"ח, או A^c סל"ח.

הפרכה:

נקח $A = \omega_1 \setminus \{\omega\}$, $A^c = \{\omega\}$. A^c כמובן לא סל"ח כי היא חסומה. A לא סל"ח כי היא לא סגורה. הסדרה $\{n\}_{n<\omega}$ מוכלת בA, אבל הגבול שלה הוא ω שאינו בA.

3. הוכח שחיתוך של ω_1 סל"חים בω_1 הוא לא בהכרח סל"ח.

הוכחה:

לכל $\alpha < \omega_1$ נגדיר $A_\alpha = \omega_1 \setminus \alpha$. ראינו בכיתה שזה סל"ח. אולם $\bigcap_{\alpha<\omega_1} A_\alpha = \emptyset$, בבירור לא סל"ח (כי חסום).

4. תהי $A \subseteq P(\omega_1)$ קבוצה של קבוצות סגורות. הוכיחו ש$\bigcap A$ היא קבוצה סגורה בω_1.

הוכחה:

תהי $\{\alpha_n\}_{n<\omega} \subseteq \bigcap A$ סדרה עולה. אז היא מוכלת בכל $B \in A$. כל B בA הוא סגור ולכן מכיל את גבול הסדרה. ומכאן ש$\lim\{\alpha_n\} \in \bigcap A$.

5. תזכורת: תהי $f : \omega_1 \to \omega_1$. קבוצת נקודות הסגור של f היא קבוצת כל הסודרים $\alpha \in \omega_1$, כך ש$f(\alpha) \subseteq \alpha$. חשב את קבוצת נקודות הסגור של הפונקציה הבאה:

$$f : \omega_1 \to \omega_1$$
$$f(\alpha) = \alpha + 1$$

פתרון:

מחפשים את כל הסודרים $\beta < \omega_1$ כך שלכל $\alpha < \beta$, $f(\alpha) = \alpha + 1 < \beta$. זה בדיוק אומר ש$\beta$ סודר גבולי. כלומר, קבוצת נקודות הסגור היא כל הסודרים הגבוליים שקטנים מω_1 .