

2.6.13
הרצאה 1

תוכן

(I) הנחיה תכונות אופסיות

$$P_n(a) = 0 \quad \text{אם } P_{n-1}(a) = 0 \quad \text{אם } P_n(a) = 0$$

$$P_{n-1}(a) \cdot P_{n+1}(a) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad P_n(a) = 0$$

(II) הפרדת אופסיות

(III) הטבה בקונוה

(IV) תרגילים

הנחיה תכונות

נניח $\{x_k^{(n)}\}$ הנקראות $\delta_{m,n}$ $\langle \hat{P}_n(x), \hat{P}_m(x) \rangle = \delta_{m,n}$ הם נורמה
 של הטורים הממשיים, $\sum a_k$ בקטע $[a, b]$ עם ריבוק אחד.

$$\hat{P}_n(x_k^{(n)}) = 0 \quad x_k^{(n)} - \text{הערך } a \text{ של פולינום } \hat{P}_n(x)$$

$$a < x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \dots < x_n^{(n)} < b$$

ראינו כי כל הפולינומים הנקראים את נוסחת הנסיגה

$$\hat{P}_{n+1}(x) = (x - c_n) \hat{P}_n(x) - \mu_n \hat{P}_{n-1}(x) \quad \forall n$$

נכנס את המשוואה לעם, במכסה סגורה $\hat{P}_n(x) P(x)$

$P(x)$ - פונקציה חשקה

$\hat{P}_{n+1}(x)$ - הפולינום $n+1$

$$\int_a^b \mu_n \hat{P}_{n+1} \cdot \hat{P}_{n+1} P(x) dx = \int_a^b (x - c_n) \hat{P}_n(x) \hat{P}_{n+1}(x) P(x) dx - \int_a^b \mu_n \hat{P}_{n-1}(x) \hat{P}_{n+1}(x) P(x) dx$$

$$\mu_n = \int_a^b (x - c_n) \hat{P}_n(x) \hat{P}_{n+1}(x) P(x) dx = 0$$

$$\mu_n = \int_a^b x \hat{P}_n(x) \hat{P}_{n+1}(x) P(x) dx - c_n \int_a^b \hat{P}_n(x) \hat{P}_{n+1}(x) P(x) dx$$

$$\mu_n = \int_a^b x \hat{P}_n(x) \hat{P}_{n+1}(x) P(x) dx$$

$$\hat{P}_n(x) = \mu_n x^n + \dots$$

$$x \hat{P}_n(x) = \frac{\mu_n \hat{P}_{n+1}(x)}{\mu_{n+1}} + P_n(x)$$

כאן מתקיים

$P_n(x)$ שארית

נר"ק את $\hat{p}_n(x)$ במטאדה

$$\lambda_n = \int_a^b [\hat{p}_n(x)] \hat{p}_{n+1}(x) p(x) dx$$

$$= \int_a^b \left[\frac{\mu_n \hat{p}_{n+1}(x)}{\mu_{n+1}} + p_n(x) \right] \hat{p}_{n+1}(x) p(x) dx$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} \right) [\hat{p}_{n+1}(x)]^2 p(x) dx + \int_a^b p_n(x) \hat{p}_{n+1}(x) p(x) dx$$

↑
מראש, $\hat{p}_n$ הינו כוללני

מסדר n - $(n+1)$

$$\lambda_n = \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} \int_a^b [\hat{p}_{n+1}(x)]^2 p(x) dx = \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} > 0$$

נסתן את w כגורם של $p_n(x)$ וגם של $p_{n+1}(x)$ (הוכחה בצדק הטלילה)

$$\hat{p}_{n+1}(w) = \hat{p}_n(w) = 0$$

זה"ל

$$\lambda_n \hat{p}_{n+1}(w) = (w - c_n) \hat{p}_n(w) - \lambda_{n-1} \hat{p}_{n-1}(w)$$

נרמז את המטאדה הנס'יה?

$$0 = 0 - \lambda_{n-1} \hat{p}_{n-1}(w)$$

נקדם

$$\hat{p}_{n-1}(w) = 0$$

זה"ל

$$\hat{p}_0(w) = 0$$

ובסוף השדרת נקדם

$$p_0(x) = \mu_0 > 0 \quad \forall x$$

ויבוס כי

קבלנו סתירה, ולכן המסקנה:

$$\hat{p}_{n+1}(w) = 0$$

$$\hat{p}_n(w) = 0 \quad \text{אם לא מתקיים}$$

נסמן שוב את w כגורם של $p_n(x)$ ונבדוק את

$$\lambda_n \hat{p}_{n+1}(w) = (w - c_n) \hat{p}_n(w) - \lambda_{n-1} \hat{p}_{n-1}(w) \quad \text{נוסחת הנס'יה}$$

$$\lambda_n \hat{p}_{n+1}(w) = -\lambda_{n-1} \hat{p}_{n-1}(w)$$

$$\frac{\hat{p}_{n+1}(w)}{\hat{p}_{n-1}(w)} = - \left(\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \right)$$

$$\forall n \quad \lambda_n > 0$$

$$p_{n+1}(w) \cdot p_{n-1}(w) < 0$$

והוכחנו כי?

תכונה של הפונקציה אנטי-מאונט

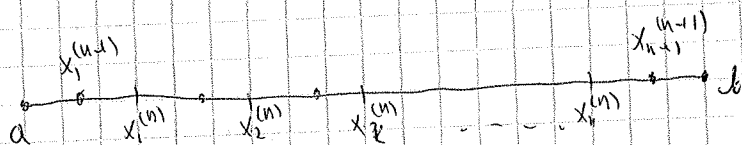
נשים ~~הערכות~~ את המאונט של $\hat{P}_n(a)$, $x_n^{(n)}$

$$a < x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \dots < x_n^{(n)} < b$$

כמו-כן נשים את המאונט של $\hat{P}_{n+1}(a)$, $x_{n+1}^{(n+1)}$

$$a < x_1^{(n+1)} < x_2^{(n+1)} < \dots < x_{n+1}^{(n+1)} < b$$

אזי בין a ו- b שני מאונט של $\hat{P}_n(a)$ נמצאו ביניהם מאונט של $\hat{P}_{n+1}(a)$



$$a < x_1^{(n+1)} < x_1^{(n)} < x_2^{(n+1)} < x_2^{(n)} < \dots < x_n^{(n)} < x_{n+1}^{(n+1)} < b$$

הוכחה: נאמרת נברר את סוגי פונקציות הקבוצה a, b

$$\hat{P}_n(a) = ?$$

נבדוק סוגי הקבוצה n כללי $n=2m$

n אי-כללי $n=2m+1$

בין a ו- $x_n^{(n)}$ אין עוד מאונט, ולכן a אינו סוגי.

$$\hat{P}_{2m}(a) > 0$$

כי איתנו נשאנן x הקרוב ביותר x^{2m}

ועבור $x \rightarrow \infty$ נקבל ביטוי חיובי.

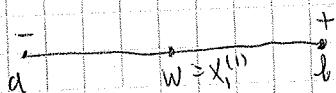
$$\hat{P}_{2m+1}(a) < 0$$

עבור הערך של הפונקציה n , הפונקציה $\hat{P}_n(a)$ תהיה חיובי עבור $x \rightarrow \infty$

$$\hat{P}_n(a) > 0$$

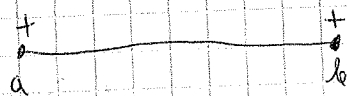
$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) =$$



$$P_2(x) =$$

כאן נחבולן הפונקציה $P_2(a)$



נזכור בהסקנה של המסלול כריסוס-דרבון (אחריו מביטל)

$$\sum_{k=0}^n |\hat{p}_k(x)|^2 = \gamma_n [\hat{p}_{n+1}'(x) \hat{p}_n(x) - \hat{p}_{n+1}(x) \hat{p}_n'(x)] > 0$$

$x=w$: $\hat{p}_n(w) = 0$ נציה אורג של $\hat{p}_n$

$$\hat{p}_{n+1}'(w) \cdot \hat{p}_n'(w) - \hat{p}_{n+1}(w) \cdot \hat{p}_n'(w) > 0$$

//
0

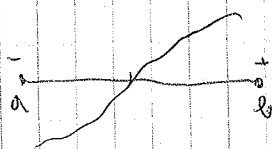
ונקבה

$$\hat{p}_{n+1}(w) \cdot \hat{p}_n'(w) < 0$$

כלומר

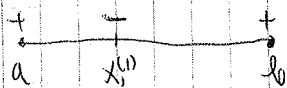
ואם נסתכל על $n=1$, הנזכרת של $\hat{p}_1$ בעזרת הרוואן (פיתוח)

הוא חיובי כי



ולכן להסקנה המסלול כריסוס-דרבון נקבה $\hat{p}_2(w) < 0$

כלומר, עבור w_2

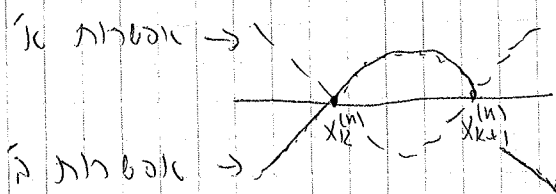


דהיינו, נקבה ברבולה, וזה קיבלנו כי טני השוואות נהגוים בין

$[a, x_1]$ ובין $[x_1, b]$

נסת נבדוק באופן דומה עבור $\hat{p}_3$ כלפי

נענוים 2 יובסיס של בוליונות $\hat{p}_3$ $x_{k+1}^{(n)}$, $x_k^{(n)}$



עבור אובסרוה $\hat{p}_3$, הנזכרת של $\hat{p}_3$ יהיה חיובי ב- $x_k^{(n)}$, וטלילי $x_{k+1}^{(n)}$

עבור טני האובסרוה, הנזכרת של $\hat{p}_3$ יהיה טלילי $x_{k+1}^{(n)}$

ולכן גם $\hat{p}_3$ יהיה טלילי, ונקבה זוכס בין $x_k^{(n)}$ ובין $x_{k+1}^{(n)}$

קיבלנו הברזרת אובסיס.

משפט סיקונד

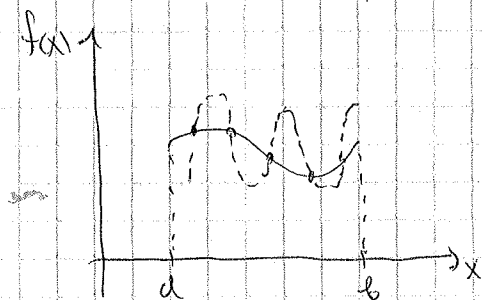
נתון כי $f(x) \in L^2_{P(x)}$ ו- $P_n(x)$ פולינומים אורתוגונליים.

נסמן את מקדמי פורייה של f ב- c_n $c_n = \langle f(x), P_n(x) \rangle$

נסמן את s_n , סכומים חלקיים של טור פורייה

$$s_n(f, x) \triangleq s_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k \hat{P}_k(x)$$

נרצה לראות מה קורה ל- s_n של הפולינומים $f(x)$ בקטע $[a, b]$



היקו הרצוי $y = f(x)$

היקו המקווקו $y = s_n(x)$

נסמן את השגיאה

$$\varphi(x) = f(x) - s_n(x)$$

המשפט סיקונד טוען כי יש עכסון n ו- m אופסים טעניארה $\varphi(x)$, למחזור.

לכחוד $(n+m)$ טינ" סיימן.

הוכחה: נוכיח בצדק, בטעניארה.

נניח שיש m טינ" - סיימן בקטע $[a, b]$, כאשר $m \leq n$

נסמן את הפולינום $w(x)$

$$w(x) = (x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_m)$$

$$\int_a^b \varphi(x) \hat{P}_k(x) P(x) dx = \int_a^b [f(x) - s_n(x)] \hat{P}_k(x) P(x) dx$$

$$= \int_a^b f(x) \hat{P}_k(x) P(x) dx - \int_a^b s_n(x) \hat{P}_k(x) P(x) dx$$

$$= c_k - \int_a^b \sum_{j=0}^n c_j \hat{P}_j(x) \hat{P}_k(x) P(x) dx$$

$$= c_k - \sum_{j=0}^n c_j \int_a^b \hat{P}_j(x) \hat{P}_k(x) P(x) dx$$

$$= c_k - c_k = 0$$

$$\int_a^b q(x) \hat{p}_k(x) \hat{p}_m(x) dx = \int_a^b [f(x) - s_m(x)] \hat{p}_k(x) p(x) dx = 0 \quad \text{מכך נובע}$$

$$\int_a^b [f(x) - s_m(x)] w_m(x) p(x) dx \quad \text{מכך נובע}$$

$$w_m(x) = \sum_{k=0}^m c_k \hat{p}_k(x) \quad \text{נציב את } w_m \text{ בצירוף סימולי של צירוף}$$

$w_m(x)$ קוצר עיני השורשים של $q(x)$ ולכן תחת האותיות הנוצרות

$$\int_a^b q(x) w_m(x) p(x) dx$$

הביטוי $q(x) w_m(x)$ הינו בעל אותו סמן חיובי או שלילי

$$\int_a^b q(x) w_m(x) p(x) dx \neq 0 \quad \text{ואכן נקבל}$$

ומכיון ש- $w_m(x)$ הינו צירוף סימולי של $\hat{p}_k(x)$ קיבלנו סתירה.

מסקנה: $q(x)$ יש להיות שורשים.

9.6.13

הרצאה 3

תוכן:

(1) תכונות פולינומים - תרגילים

2) תרגילים - הסבר 6 - (הערות אורחא נולות)

אולם 1: נגזיר פונקציה

$$T_n(x) = \cos[n \cdot \arccos(x)]$$

$$T_n(x) \in C^2_{[a,b]}$$

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

פונקציות גזוק

א הוכח כי סדרת הפונקציות $\{T_n(x)\}$ היא סדרת פולינומים

x ממעלה n, הנקראת פולינומי צ'בשב (chebyshev)

$$\theta = \arccos(x)$$

נסמן

בתוך:

$$T_n(x) = \cos(n\theta) = \frac{1}{2} [e^{in\theta} + e^{-in\theta}]$$

$$= \frac{1}{2} [(e^{i\theta})^n + (e^{-i\theta})^n]$$

$$= \frac{1}{2} [(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n + (\cos(\theta) - i\sin(\theta))^n]$$

$$\theta = \arccos(x) \Rightarrow x = \cos(\theta) \Rightarrow \sin(\theta) = \sqrt{1-x^2}$$

$$0 \leq \theta \leq \pi \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \{ [x + i\sqrt{1-x^2}]^n + [x - i\sqrt{1-x^2}]^n \}$$

נכתוב את המעצרים לפי הבינום של ניוטון

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} (i\sqrt{1-x^2})^k + \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} (-i\sqrt{1-x^2})^k \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} (i)^k (\sqrt{1-x^2})^k [1 + (-1)^k]$$

↑

אם k אי-זוגי, הביטוי מתאפס, ניקח n זוגי.

$$\sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} (i)^k (\sqrt{1-x^2})^k$$

$$k = 2s; \quad s = 0, \dots, n/2$$

$$T_n(x) = \sum_{s=0}^{n/2} C_n^{2s} x^{n-2s} \cdot (i)^{2s} (1-x^2)^s$$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} (-1)^{k/2} (1-x^2)^{k/2}$$

ניתן לקרוא x^k הזמניה

קראנו כי $T_n(x)$ הינו פולינום של x ממעלה n .

ב) הוכח כי $T_n(x)$ היא נורמלית ו- $T_0(x)$ בקטע $[-1, 1]$

בזמן שנוקצית הנקודה x

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

יתרון: נאמר נשים-לפי כי בקטע $[-1, 1]$ הפונקציה הנומלית
כעת נקטת את האינטגרל.

$$\int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) P(x) dx = \int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

נציב $x = \cos(\theta)$

$dx = -\sin(\theta) d\theta$

$$= \int_0^\pi \frac{1}{\sin(\theta)} \cos(n\theta) \cos(m\theta) \sin(\theta) d\theta$$

סוג האינטגרל הנבדל הנגזר החלפת θ ו- π .

$$= \int_0^\pi \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\pi [\cos((n+m)\theta) + \cos((n-m)\theta)] d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin((n+m)\theta)}{n+m} + \frac{\sin((n-m)\theta)}{n-m} \right]_0^\pi = 0$$

לכן $n \neq m$ נקבל

$$\int_{-1}^1 T_n(x) T_n(x) P(x) dx = \int_0^\pi \cos^2(n\theta) d\theta$$

$$= \int_0^\pi \frac{1}{2} [1 + \cos(2n\theta)] d\theta = \frac{\pi}{2} \quad n \neq 0$$

$$\|T_n(x)\| = \begin{cases} \sqrt{\pi} & n=0 \\ \sqrt{\pi/2} & n \neq 0 \end{cases}$$

$$T_n(x) = \delta_n x^n + \dots + \delta_0 \quad \text{אם } (1)$$

האם δ_n תלוי ב- n ?

כן, כי δ_n תלוי ב- n .

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \left[(x + i\sqrt{1-x^2})^n + (x - i\sqrt{1-x^2})^n \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[(x + \sqrt{x^2-1})^n + (x - \sqrt{x^2-1})^n \right]$$

האם δ_n תלוי ב- n ?

$$\delta_n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{T_n(x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\delta_n x^n + \dots + \delta_0}{x^n}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left[\frac{(x + \sqrt{x^2-1})^n}{x^n} + \frac{(x - \sqrt{x^2-1})^n}{x^n} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{x + \sqrt{x^2-1}}{x} \right)^n + \left(\frac{x - \sqrt{x^2-1}}{x} \right)^n \right]$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right)^n + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right)^n \right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (2^n) + (1-1)^n$$

$$\delta_n = 2^{n-1}$$

האם δ_n תלוי ב- n ?

$$\cos[(n+1)\theta] + \cos[(n-1)\theta] = 2\cos(n\theta)\cos(\theta)$$

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2T_n(x) \cdot x$$

$$T_{n+1}(x) = 2T_n(x) \cdot x - T_{n-1}(x)$$

האם δ_n תלוי ב- n ?

$$n=0 \Rightarrow \cos(0) = 1 \Rightarrow T_0(x) = 1$$

$$n=1 \Rightarrow \cos(\theta) = x \Rightarrow T_1(x) = x$$

$$n=2 \Rightarrow T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$n=3 \Rightarrow T_3(x) = 2 \cdot T_2(x) \cdot x - T_1(x) \\ = 2(2x^2 - 1) \cdot x - x$$

$$n=3 \Rightarrow T_3(x) = 4x^3 - 2x^2 - x$$

$$\|T_n(x)\| = \begin{cases} 1 & n=0 \\ \sqrt{n^2} & n \neq 0 \end{cases} \quad \text{סעיף 3: סדרות}$$

סעיף 4: הוכח כי לכל $T_n(x)$ הוא סדרות של הקטנות

$$[\sqrt{1-x^2} \cdot y]' + n^2 \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

ולכן $T_n(x)$ היא פונקציה שלבית של הקטנות.

סדרות: צריך להבין $y = T_n(x)$ ולראות כי אכן מתקבל סדרות.

אם מניחים שיש את הקטנות

$$\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} y' + y'' \sqrt{1-x^2} + n^2 \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

מכילים את $\sqrt{1-x^2}$

$$y''(1-x^2) - xy' + n^2 y = 0$$

כעת, נחזור לסדרות.

$$y = T_n(x) = \cos(n\theta)$$

$$y' = -n \sin(n\theta) \cdot \frac{d\theta}{dx}$$

$$\sqrt{1-x^2} = \sin(\theta)$$

$$[\sqrt{1-x^2} \cdot y]' = [\sin(\theta) \cdot n \sin(n\theta) \frac{d\theta}{dx}]'$$

$$= -\cos(\theta) \cdot n \cdot \sin(n\theta) \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 - \sin(\theta) n^2 \cos(n\theta) \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 - \sin(n\theta) \cos(\theta) \frac{d^2\theta}{dx^2}$$

מתבונן בהצגה הבאה של הקטנות

$$\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} y' + y'' \sqrt{1-x^2} + n^2 \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

זכור סדרות קטנו בהצגה הבאה. / תרגום-ביט.

$$y = \cos(n \cdot \arccos(x))$$

$$y' = -n \sin(n \cdot \arccos(x)) \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{n \sin(n \arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}}$$

שאלה 2: יהי $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ עיגול יחידה סגור ב- $\mathbb{R}^2$.

ויהי (D) מוסל כל הפונקציות הרגולריות $f: D \rightarrow \mathbb{C}$
 לכל $f, g \in (D)$ נגדיר מכפלה סכימית.

$$\langle f, g \rangle = \iint_D f(x,y) \cdot \overline{g(x,y)} dx dy$$

ולכל n טבעי יהי $f_n(x,y) = (x+iy)^n$

א) הוכח כי $\langle f, g \rangle$ היא מכפלה סכימית על (D) ?

כתיבון: יש לבדוק כי התכונות מתקיימות.

ב) הוכח כי סדרת הפונקציות $\{f_n(x,y)\}_{n=0}^\infty$ היא טוריט אורתוגונלית
 וחסה את $\|f_n\|$?

כתיבון: $\iint_D (x+iy)^n \overline{(x+iy)^m} dx dy$

נגדיר $x+iy = re^{i\varphi}$

$r = \rho$

$0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 r^n e^{in\varphi} \cdot r^m e^{-im\varphi} \cdot r dr d\varphi = \int_0^1 r^{m+n+1} dr \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\varphi} d\varphi$$

עבור $n \neq m$ מתאכסס, זכור *

$$\frac{e^{i(n-m)\varphi}}{i(n-m)} \Big|_0^{2\pi} = 0$$

לכור $n=m$

$$\|f_n\|^2 = \frac{r^{2n+2}}{2n+2} \Big|_0^1 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{n+1}$$

שאלה 3: הפולינומים של לגנדר (Legendre) הם:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$$

א) הוכח כי באיחוד $[-1,1]$ מתקיים

$$\langle P_n(x), P_m(x) \rangle = \int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{2}{2n+1} & n=m \end{cases}$$

$P(x) = 1$ פונקציה נוקצית, נטקס, עבר וסדר

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{1}{2^m \cdot m!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} \frac{d^m (x^2 - 1)^m}{dx^m} dx$$

$$\phi(x) \cdot (x^2 - 1)^n = (x-1)^n (x+1)^n$$

$$\begin{cases} \phi(\pm 1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi^{(s)}(\pm 1) = 0, s < n \end{cases}$$

ϕ ונגזרותיה מהסוגים

נקצות $x = (\pm 1)$

$$\forall \epsilon > 0; \exists \left\{ \begin{matrix} N(\epsilon, \lambda) & \text{כמות} \\ N(\epsilon) & \text{כמות} \end{matrix} \right\}; \quad |s_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad n \geq N$$

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k \hat{p}_k(x) = \sum_{k=0}^n \left(\int_a^b f(t) P(t) \hat{p}_k(t) dt \right) \hat{p}_k(x) \quad \text{מוכחה}$$

$$= \int_a^b f(t) P(t) \left(\sum_{k=0}^n \hat{p}_k(x) \hat{p}_k(t) \right) dt$$

$$K(x, t) \triangleq \sum_{k=0}^n \hat{p}_k(x) \hat{p}_k(t) \quad \text{נסמן את גורמן כריסלר}$$

ראינו כי גורמן נקרא (הגורמן, כמות, תנאי) - (n)

$$(*) \quad K_n(x, t) = \lambda_n \left[\frac{\hat{p}_{n+1}(x) \hat{p}_n(t) - \hat{p}_{n+1}(t) \hat{p}_n(x)}{x-t} \right]$$

$$s_n(x) = \int_a^b f(t) P(t) K_n(x, t) dt$$

נציב $f(t) \equiv 1$, ונקבל

$$1 = \int_a^b P(t) K_n(x, t) dt$$

נכנס שני אנשים - $f(x)$

$$f(x) = \int_a^b f(t) P(t) K_n(x, t) dt \quad (\text{נכנס לאנשים, לא תנאי} - t)$$

$$f(x) - s_n(x) = \int_a^b P(t) K_n(x, t) [f(x) - f(t)] dt$$

נציב את $K_n(x, t)$ מכי (*)

$$f(x) - s_n(x) = \int_a^b P(t) [f(x) - f(t)] \lambda_n \left[\frac{\hat{p}_{n+1}(x) \hat{p}_n(t) - \hat{p}_{n+1}(t) \hat{p}_n(x)}{x-t} \right] dt$$

$$f(x) - s_n(x) = \lambda_n \int_a^b P(t) \underbrace{\left[\frac{f(x) - f(t)}{x-t} \right]}_{\text{אנשים}} \left[\hat{p}_{n+1}(x) \hat{p}_n(t) - \hat{p}_{n+1}(t) \hat{p}_n(x) \right] dt$$

$$\lambda_n \leq C$$

$$C = \max \{ |a|, |b| \}$$

$$\phi(x) = \frac{f(x) - f(t)}{x-t}$$

$$\phi(x) \in C^1[a, b]$$

ההסתמה של הנחה I

$$f(x) \in Lip^1$$

$\phi(x)$ כונק, נציב x ונשתנה ונשתנה

$$f(x) - s_n(x) = \gamma_n \left[\int_a^b P(t) \varphi(x+t) \hat{P}_n(t) dt \hat{P}_{n+1}(x) - \int_a^b P(t) \varphi(x,t) \hat{P}_{n+1}(t) dt \hat{P}_n(x) \right]$$

משפט

נבחר את מקדם כוריה של $\varphi(x,t)$

$$C_n^*(\varphi) = \int_a^b P(t) \varphi(x+t) \hat{P}_n(t) dt$$

$$|a+b| \leq |a| + |b| \quad \text{נזכר כי}$$

$$|f(x) - s_n(x)| \leq C \left[|C_n^*(\varphi) \hat{P}_{n+1}(x)| + |C_{n+1}^*(\varphi) \hat{P}_n(x)| \right]$$

$$|f(x) - s_n(x)| \leq C \left[|C_n^*(\varphi)| \cdot |\hat{P}_{n+1}(x)| + |C_{n+1}^*(\varphi)| \cdot |\hat{P}_n(x)| \right]$$

$$\forall_n |\hat{P}_n(x)| < K \quad \text{לפי הנחה II של המשפט}$$

$$|f(x) - s_n(x)| \leq CK \left[|C_n^*(\varphi)| + |C_{n+1}^*(\varphi)| \right]$$

מכיוון ש- $C_n^*(\varphi)$ הוא מקדם כוריה של φ , ואולי מתקיים $C_n^*(\varphi) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

אם ההתכנסות של φ , ואולי אף התכנס ל- φ נקודתית.

אם ההתכנסות של φ , ואולי אף התכנס ל- φ בגידה שלמה.

3. תרגילים מספר 6 - מערכות אורתוגונליות

מילה צ'ר הוסינומית של שזנדר (Legendre) הם

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad \text{הצגה דורצ'אן}$$

הערה: לכל סעיפים קטנים (אם נשקל סדרון, נשקל התקיים)

$$\begin{pmatrix} A(x) \\ B(x) \end{pmatrix} = \frac{y'}{y} \quad A(x) = ax + b, \quad B(x) = c_1 x^2 + c_2 x + c_3$$

ההצגה דורצ'אן.

א. הוכח כי התרחות $[0, 1]$ מתקיים

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{2}{2n+1} & n = m \end{cases}$$

פונקציות ההסקה המקסימליות $P(x)=1$

$$P(x) = (x^2-1)^n = (x-1)^n (x+1)^n$$

הזירה של נגזרת S של P בקצוות שווה 0.

$$P^{(s)}(x=\pm 1) = 0 \quad s < n$$

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{1}{2^n \cdot 2^m n! m!} \int_{-1}^1 \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} \frac{d^m (x^2-1)^m}{dx^m} dx$$

נבצע אינטגרציה בחלקים.

$$u = \frac{d^m (x^2-1)^m}{dx^m} \quad dv = \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}$$

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{1}{2^n \cdot 2^m n! m!}$$

$$\left[\frac{d^{n-1} (x^2-1)^n}{dx^{n-1}} \frac{d^m (x^2-1)^m}{dx^m} - \frac{d^{n-2} (x^2-1)^n}{dx^{n-2}} \frac{d^{m+1} (x^2-1)^m}{dx^{m+1}} \right. \\ \left. + \dots + (-1)^{n-1} \frac{d^{m+n-1} (x^2-1)^m}{dx^{m+n-1}} \right]_{-1}^1 \\ + (-1)^n \int_{-1}^1 (x^2-1)^n \frac{d^{m+n} (x^2-1)^m}{dx^{m+n}} dx$$

מתאם
ההזרות
המילוטרי

למחר אויבס המעבר, נקבע

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{(-1)^n}{2^n \cdot 2^m n! m!} \int_{-1}^1 (x^2-1)^n \frac{d^{n+m} (x^2-1)^m}{dx^{n+m}} dx$$

אם $m > n$ או $n > 2m$ (בגלל הגדרת הכפולות)

$(x^2-1)^m$ הינו פולינום מסדר $2m$ (לכן נגזרת m $n+m > 2m$ יתן אפס).

הערה: המעירה בין n ו- m טר' כות'א, ולמעשה הוכחנו כי הכולנו מתאפס עבור $n \neq m$, הוכחנו אורתוגונליות.

כעת נבדוק עבור $n=m$

$$\|P_n(x)\|^2 = \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{(-1)^n}{2^n (n!)^2} \int_{-1}^1 (x^2-1)^n \frac{d^{2n} (x^2-1)^n}{dx^{2n}} dx$$

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} (x^2-1)^n = [(x^2-1)^n]^{(2n)} = (2n)!$$

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \int_{-1}^1 (x^2-1)^n dx$$

נבדוק את האינטגרל

$$\int_{-1}^1 (x^2-1)^n dx = \int_{-1}^1 (x+1)^n (x-1)^n dx$$

$$\begin{cases} u = (x-1)^n \\ dv = (x+1)^n \end{cases}$$

נגזר

נעזר אינטגרל בריבוי

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (x-1)^n (x+1)^n dx &= (x-1)^n \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} - \frac{n(x-1)^{n-1} (x+1)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \\ &\quad + \dots + (-1)^{n-1} \cdot n! (x-1) \frac{(x+1)^{2n}}{(n+1)(n+2) \dots (2n)} \bigg|_{-1}^1 \\ &\quad + (-1)^n n! \int_{-1}^1 \frac{(x+1)^{2n}}{(n+1)(n+2) \dots (2n)} dx \end{aligned}$$

לאחר החלפת גבולות האינטגרל, נקבל, כי האינטגרל הוא

$$\left. \frac{(-1)^n n! (x+1)^{2n+1}}{(n+1)(n+2) \dots (2n)} \right|_{-1}^1 = \frac{(-1)^n n! \cdot 2^{2n+1}}{(n+1)(n+2) \dots (2n)(2n+1)}$$

נכפל מונה ומכנה ב-1

$$= \frac{(-1)^n (n!)^2 2^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\|P_n(x)\|^2 = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \cdot \frac{(-1)^n (n!)^2 2^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1}$$

$$P_n(x) = \delta_n x^n + \dots + \delta_0$$

המשקל של פולינום

$$\hat{P}_n(x) = \mu_n x^n + \dots + \mu_0$$

$$\frac{\delta_n}{\|P_n(x)\|} = \mu_n$$

כיתרון

$$\delta_n = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$$

נבדל

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$$

משקל

$$\begin{aligned}
 \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n &= \frac{d^n}{dx^n} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} (x^2)^{n-k} (-1)^k \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{d^n}{dx^n} x^{2n-2k} (-1)^k \\
 &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} (2n-2k) \dots (n-2k+1) x^{n-2k}
 \end{aligned}$$

עבור החזקה הזו, $k=0$, וזאת, הנחיה

$$\frac{n!}{0!n!} \cdot \frac{(2n)!}{n!} x^n$$

נכנס בתוך n מסתמי האינסוף

$$\frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{(2n)!}{n!} x^n$$

$$\delta_n = \frac{(2n)!}{2^n \cdot (n!)^2}$$