תרגול 1

תזכורת: עבור קבוצה $E \subseteq \mathbb{R}$ נגדיר את המידה החיצונית של E להיות

$$m^*(E) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \mid \bigcup_{I_n \text{ open}} I_n \supset E\right\},$$

כאשר ה inf הינו על כל הכיסויים של הקבוצה E ע"י קטעים פתוחים.

המידה החיצונית הינה פונקציה $m^*(\cdot): P(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ כאשר $P(\mathbb{R})$ הינה קבוצת כל הקבוצות ב $\mathbb{R}$. היא מקיימת:

I. $m^*(\varnothing) = 0$

II. $A \subseteq B \Rightarrow m^*(A) \le m^*(B)$ (מונוטוניות)

III. $m^*(A \cup B) \le m^*(B) + m^*(A)$ (סאב-אדיטיביות)

1) הוכיחו כי המידה של כל קטע שווה לאורכו.

פתרון: נסמן $l(I)$ - אורך קטע $m^*(I)$ - מידה חיצונית שלו.

$m^*(I) \le l(I)$: אם $l(I) = \infty$ סיימנו. אחרת, נניח כי $I = [a,b]$ (או (a,b) וכו') נזכיר כי עפ"י הגדרה :

$$m^*(I) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \mid \bigcup_{I_n \text{ open}} I_n \supset I\right\}$$

הקטע $I_\varepsilon = (a-\varepsilon, b+\varepsilon)$ מכיל את I ואורכו $l(I) + 2\varepsilon$ ומכאן שלכל $\varepsilon > 0$

$$m^*(I) \le l(I) + 2\varepsilon \Rightarrow m^*(I) \le l(I)$$

$m^*(I) \ge l(I)$:

נחלק למקרים:

i. אם I קומפקטי $I = [a,b]$: נניח ש $\{I_n\}$ הינו אוסף של קטעים פתוחים כך ש $\bigcup I_n \supseteq I$. מכיוון ש I קומפקטי קיים אוסף סופי של קטעים פתוחים $A = \{I_1, \ldots, I_n\}$ כך ש $\bigcup_{i=1}^{k} I_i \supseteq I$. נבנה את הקבוצה A באופן הבא:

נבחר $I_1' \in A$ להיות איזשהו קטע שמכיל את a, וגם

$$
\begin{aligned}
&I_1' = (x_1, y_1): \quad x_1 < a < y_1 \\
&I_2' = (x_2, y_2): \quad x_2 < y_1 < y_2 \\
&\vdots \\
&I_i' = (x_i, y_i): \quad x_i < y_{i-1} < y_i \\
&\vdots \\
&I_k' = (x_k, y_k): \quad x_k < b < y_k
\end{aligned}
$$

עכשיו, מכל כיסוי $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (יכול להיות גם אינסופי) נוכל ליצור כיסוי סופי של קטעים פתוחים (כמו מקודם) ומתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \geq \sum_{i=1}^{k} l(I_i') = \sum_{i=1}^{k} (y_i - x_i) \geq b - a$$

ומכאן נובע

$$m^*(I) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \mid \bigcup_{I_n \text{ open}} I_n \supset I \right\} \geq l(I)$$

ii. עבור קטע כללי מהצורה $I = (a,b], (a,b), [a,b)$ נשתמש בעובדה כי $A \subseteq B \Rightarrow m^*(A) \leq m^*(B)$. ניקח קטע $I' = [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ ונשים לב שמתקיים לכל $\varepsilon > 0$

$$
\begin{aligned}
&b - a - 2\varepsilon = m^*(I') \leq m^*(I) \\
&\Rightarrow b - a \leq m^*(I)
\end{aligned}
$$

iii. עבור קטע מהצורה (a,∞) או $[a,\infty)$ נבחר $[a+1, a+n] \subseteq I$ ולכן לכל n מתקיים

$$m^*(I) \geq n - 1 \Rightarrow m^*(I) = \infty$$

מש"ל

2) הוכיחו כי אם $m^*(A) = 0$ אזי $m^*(A \cup B) = m^*(B)$.

פתרון:

$\geq$: $B \subseteq A \cup B$ ולכן $m^*(A \cup B) \geq m^*(B)$.

$\leq$: עפ"י ה sub-additive property מתקיים

$$\begin{aligned}&m^*\left(A\cup B\right)\le m^*\left(A\right)+m^*\left(B\right)\\&\Rightarrow m^*\left(A\cup B\right)\le m^*\left(B\right)\end{aligned}$$

3) תהי A קבוצת האי רציונאליים באינטרוול $[0,1]$. הוכח כי $m^*\left(A\right)=1$.

פתרון:

המידה החיצונית של כל נקודה ב $\mathbb{R}$ היא 0 מכיוון שאם $x\in\mathbb{R}$ נקודה, אזי לכל $\varepsilon>0$ קיים הקטע $\left(x-\varepsilon,x+\varepsilon\right)$ שאורכו 2ε ומכיל את x , לכן :

לכל $m^*\left(x\right)\le 2\varepsilon\Rightarrow m^*\left(x\right)=0$.

נסמן ב B את קבוצת הראציונאליים ב $[0,1]$, B היא בת מנייה ולכן נוכל לרשום $B=\left\{x_i\right\}_{i\in\mathbb{N}}$.

כמו כן

$$m^*\left(B\right)\le\sum_{i=1}^{\infty}m^*\left(x_i\right)=0\Rightarrow m^*\left(B\right)=0$$

נזכור כי $\mathrm{B}\cup\mathrm{A}=[0,1]$ ולכן

$$1=m^*\left([0,1]\right)\le m^*\left(B\right)+m^*\left(A\right)=m^*\left(A\right)$$

מצד שני

$$\mathrm{A}\subseteq[0,1] \text{ ולכן } 1\ge m^*\left(A\right)\ \Leftarrow\ m^*\left(A\right)=1$$

מש"ל

4) תהי B קבוצת הרציונאליים ב $[0,1]$ ותהי $\left\{I_k\right\}_{k=1}^{n}$ קבוצה סופית של קטעים פתוחים שמכסה את B. הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{n}m^*\left(I_k\right)\ge 1$.

פתרון:

$$1=m^*\left([0,1]\right)=m^*\left(\overline{B}\right)\le m^*\left(\overline{\bigcup I_n}\right)=m^*\left(\bigcup\overline{I_n}\right)\le\sum m^*\left(\overline{I_n}\right)=\sum l\left(\overline{I_n}\right)$$

מש"ל

שימו לב כי השיוויון $\overline{\bigcup I_n}=\bigcup\overline{I_n}$ מתקיים כי קבוצת הקטעים $\left\{I_k\right\}_{k=1}^{n}$ הינה סופית.

אם ניקח לדוגמא את הסדרה $\left\{I_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ כאשר $I_k=\left(\frac{1}{k},1-\frac{1}{k}\right)$ נקבל כי

$$\overline{\bigcup I_k} = \overline{\bigcup\left(\frac{1}{k},1-\frac{1}{k}\right)} = \overline{(0,1)} = [0,1]$$

לעומת זאת

$$\bigcup \overline{I_k} = \bigcup\left[\frac{1}{k},1-\frac{1}{k}\right] = (0,1)$$

5) הוכיחו: כל קבוצה פתוחה $G \subseteq \mathbb{R}$ הינה איחוד בן מניה של קטעים זרים פתוחים ב $\mathbb{R}$.

פתרון:

לכל $x \in G$, יהי I_x הקטע הפתוח הגדול ביותר ב $\mathbb{R}$ כך שמתקיים $x \in I_x \subseteq G$. נניח כי $x, y \in G$ וגם $I_x \cap I_y \neq \emptyset$ אזי $I_x \cup I_y$ הינו קטע פתוח וכן

$I_y \subseteq I_x \cup I_y \subseteq G$ וגם $I_x \subseteq I_x \cup I_y \subseteq G$

מההגדרה של I_x ו I_y נובע ש $I_x = I_x \cup I_y$ וכן $I_y = I_x \cup I_y$ ולכן $I_y = I_x$. מכאן נובע כי I_x ו I_y הינם שווים או זרים, ולכן G הינו איחוד זר של קטעים פתוחים ב $\mathbb{R}$.

$$G = \bigcup_{I \in \mathcal{C}} I$$

כעת נראה כי $\mathcal{C}$ הינו אוסף בן מניה . נשים לב כי כל $I \in \mathcal{C}$ מכיל מספר ראציונאלי x_I.
נוכל לבנות מיפוי חח"ע ועל

$$\varphi : \mathcal{C} \to \{x_I : I \in \mathcal{C}\}$$

ע"י $\varphi(I) = x_I$ לכל $I \in \mathcal{C}$. כלומר, לכל $I \in \mathcal{C}$ נתאים את הראצינאלי שבחרנו ממנו.
כמובן ש $\{x_I : I \in \mathcal{C}\} \subseteq \mathbb{Q}$ ולכן הינה בת מניה ומכאן ש $\mathcal{C}$ בת מנייה.