תרגיל 5

11 בנובמבר 2018

1. . הוכיחו: $n\cdot\omega=\omega$ לכל n טבעי.
הוכחה:

יהי n טבעי נתון. $n\cdot\omega=n\sup\{m:m\in\omega\}=\sup\{nm:m\in\omega\}=\omega$.

2. הוכיחו את חוק הפילוג מימין: $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$.
הוכיחו שאין פילוג משמאל. כלומר, $(\beta+\gamma)\alpha$ לא בהכרח שווה ל$\beta\alpha+\gamma\alpha$.
פתרון:

פילוג מימין: $\alpha(\beta+\gamma)=type((\beta+\gamma)\times\alpha)$. כלומר, יש איזו סדר ל $(\beta+\gamma)\times\alpha$. בנוסף, $\beta+\gamma=type((\{0\}\times\beta)\cup(\{1\}\times\gamma))$. לכן, $\alpha(\beta+\gamma)$ איזומורפי סדר ל $((\{0\}\times\beta)\cup(\{1\}\times\gamma))\times\alpha=((\{0\}\times\beta)\times\alpha)\cup((\{1\}\times\gamma)\times\alpha)$.

מצד שני, $\alpha\beta+\alpha\gamma=type((\{0\}\times\alpha\beta)\cup(\{1\}\times\alpha\gamma))$. אבל, יש איזו' סדר מ$\alpha\beta$ ל $\beta\times\alpha$, ומ$\alpha\gamma$ ל $\gamma\times\alpha$. לכן, $\alpha\beta+\alpha\gamma$ איזומורפי ל $(\{0\}\times\beta\times\alpha)\cup(\{1\}\times\gamma\times\alpha)$.

לכן, $\alpha(\beta+\gamma)\cong\alpha\beta+\alpha\gamma$. ומכיוון שזה סודרים, זה אומר שהם שווים.

פילוג משמאל: נקח $\alpha=\omega,\beta=\gamma=1$. נקבל: $(1+1)\omega=2\omega=\omega\neq\omega+\omega$

3. הוכיחו: יהיו $\alpha,\beta\neq 0$. אזי: $\alpha\beta$ גבולי $\iff$ β גבולי או α גבולי.
פתרון:

אם βגבולי אז הוכחנו בתרגול ש $\alpha\beta$ גבולי.

אם β עוקב, אז $\beta=\gamma+1$ לאיזשהו סודר γ. ואז: $\alpha\beta=\alpha(\gamma+1)=\alpha\gamma+\alpha$. וזה גבולי אמ"ם α גבולי.

4. תזכורת: לכל $\beta\neq 0$ וα סודרים, קיימים γ,δ יחידים כך ש$\alpha=\beta\gamma+\delta$, וכן $\delta<\beta$. נסמן $\delta=\alpha\mod\beta$. חשבו:
   (א) $(\omega+\omega)\mod 5$
   (ב) $\omega^2\mod(\omega+2)$
   פתרון:
   א. טענה: $\omega+\omega=5(\omega+\omega)$.
   הסבר: $5(\omega+\omega)=5\omega+5\omega=\omega+\omega$.
   לכן השארית היא 0 .
   ב. טענה: $\omega^2=(\omega+2)\omega$.
   הוכחה: ω גבולי, ולכן:

$(\omega+2)\omega = (\omega+2)\sup\{n : n < \omega\} = \sup\{(\omega+2)n : n < \omega\} = \sup\{\omega n + 2 : n < \omega\} = \sup\{\omega n : n < \omega\} = \omega \sup\{n : n < \omega\} = \omega \cdot \omega = \omega^2$

(שימו לב: $(\omega+2)\cdot n = \omega\cdot n+2$ מכיוון ש $(\omega+2)n = (\omega+2)+...+(\omega+2) = \omega + (2+\omega) + ... + (2+\omega) + 2 = \omega + ... + \omega + 2 = \omega \cdot n + 2$)

מסקנה: $\omega^2 \mod (\omega+2) = 0$

5. תנו דוגמא לסודרים שונים מ0 α, β כך שלא קיימים γ, δ סודרים שמקיימים: $\alpha = \gamma\beta + \delta$ וגם $\delta < \beta$.

פתרון:

נקח $\alpha = \omega, \beta = 2$. אם קיימים כאלה, אז $\delta = 0 \vee 1$. 1 לא ייתכן, כי ω גבולי. לכן $\delta = 0$. כלומר, $\omega = \gamma \cdot 2$. אבל אם $\gamma < \omega$ אז $\gamma = n$ לאיזשהו n, ו $n \cdot 2 < \omega$. ואם $\gamma \geq \omega$ אז $\gamma \cdot 2 \geq \omega \cdot 2 = \omega + \omega > \omega$. סתירה.