סדרות נורמליות וסדרות הרכב:

הגדרה: **סדרה נורמלית** של חבורה G היא סדרה של תת חבורות נורמליות:

$$G = G_0 \rhd G_1 \rhd G_2 \rhd ... \rhd G_k = \{e\}$$

בשיעור זה נאמץ את השיטה בה הסימון $H \lhd G$ אומר ש $H \neq G$.

חבורות המנה $0 \le i < k$, G_i / G_{i+1} נקראות ה**גורמים** של הסדרה.

דוגמאות:

1. לכל חבורה G , $G \rhd \{e\}$ סדרה נורמלית. הגורם היחיד הוא $G / \{e\} \cong G$.
2. $G = S_3$, $N :=< (1,2,3) > \lhd G$. נקבל $\{e\} \lhd N \lhd G$ היא סדרה נורמלית. הגורמים הם $G / N \cong \mathbb{Z}_2$ וגם $N / \{e\} \cong \mathbb{Z}_3$.

הגדרה: **עידון של סדרה נורמלית** $... G \rhd ... \rhd A \rhd B \rhd$ היא סדרה $... G \rhd ... \rhd A \rhd C \rhd B \rhd$ (כלומר הוספנו עוד חבורה בסדרה).

הגדרה: **סדרת הרכב** היא סדרה נורמלית שאין לה עידונים ממש.

משפט: סדרה נורמלית היא סדרת הרכב אם ורק אם כל הגורמים של הסדרה הם פשוטים.

הערה: חבורה אבלית היא פשוטה אם ורק אם היא ציקלית סופית מסדר ראשוני (זה מאפשר לנו לדעת בקלות שאם אחד הגורמים הוא אבלי, אך אינו ציקלי סופי מסדר ראשוני, אזי הסדרה **אינה** סדרת הרכב).

דוגמאות:

$$\mathbb{Z}^4 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rhd \mathbb{Z}^3 \times \{e\} \rhd \{e\} \times \{e\} \times \{e\} \times \{e\}$$

עידון של הסדרה הנ"ל הוא

$$\mathbb{Z}^4 \rhd \mathbb{Z}^3 \times \{e\} \rhd \mathbb{Z}^2 \times \{e\} \times \{e\} \rhd \{e\} \times \{e\} \times \{e\} \times \{e\}$$

$S_n \rhd A_n \rhd \{Id\}, n \ge 5$ סדרת הרכב כי כל הגורמים הם חבורות פשוטות.

$S_4 \rhd A_4 \rhd \{Id\}$ לא סדרת הרכב כי $A_4 \rhd V_4 = \{Id, (1 \quad 2)(3 \quad 4), (1 \quad 3)(2 \quad 4), (1 \quad 4)(2 \quad 3)\}$ ועדיין $S_4 \rhd A_4 \rhd V_4 \rhd \{e\}$ אינה סדרת הרכב כי אפשר לעדן אותה ע"י $\{e, (1 \quad 2)(3 \quad 4)\} =: V_4 \rhd U$. שימו לב: $U \ntriangleleft A_4, S_4$. לבסוף קיבלנו את הסדרה הנורמלית $S_4 \rhd A_4 \rhd V_4 \rhd U \rhd \{e\}$ וזאת סדרת הרכב כי כל הגורמים הם מסדר 2 ולכן איזומורפיים ל $\mathbb{Z}_2$.

$Z \rhd 2Z \rhd 4Z \rhd 8Z \rhd ... \rhd 2^m Z \rhd \{0\}$ אין סדרת הרכב (תמיד אפשר לעדן אותה).

הגדרה: שתי סדרות נורמליות של חבורה G

$$G=G_0 \rhd G_1 \rhd G_2 \rhd ... \rhd G_k=\{e\}$$
$$G=H_0 \rhd H_1 \rhd H_2 \rhd ... \rhd H_m=\{e\}$$

נקראות **שקולות** אם $k=m$ והגורמים איזומורפיים עד כדי תמורה: כלומר $\pi \in S_k$ כך ש-
$G_{i-1}/G_i \cong H_{\pi(i)-1}/H_{\pi(i)}$ (כאשר $1 \le i \le k$).

משפט ז'ורדן-הולדר: אם ל G יש סדרות הרכב אז כל שתי סדרות הרכב שקולות.

דוגמא: ל S_3 יש תח"נ יחידה, והיא A_3. לכן סדרת ההרכב היחידה של S_3 היא $S_3 \rhd A_3 \rhd \{e\}$ עם הגורמים $(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_3)$. לעומת זאת, לחבורה $\mathbb{Z}_6$ יש שתי תח"נ, $3\mathbb{Z}_6, 2\mathbb{Z}_6$, ונקבל שתי סדרות הרכב:

$$\mathbb{Z}_6 \rhd 3\mathbb{Z}_6 \rhd \{0\}$$
$$\mathbb{Z}_6 \rhd 2\mathbb{Z}_6 \rhd \{0\}$$

הגורמים בהתאמה הם $(\mathbb{Z}_3,\mathbb{Z}_2)$ ו- $(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_3)$, ואכן הסדרות שקולות.

נשים לב של S_3 ו- $\mathbb{Z}_6$ יש אותם גורמים, אבל הן אינן איזומורפיות.

חבורות פתירות:

הגדרה: חבורה היא **פתירה** אם יש לה סדרה נורמלית (לאו דווקא סדרת הרכב) כך שכל הגורמים אבלים.

דוגמא:

1. **כל** חבורה אבלית פתירה מכיוון ש $G \rhd \{e\}$ שהגורם היחיד בה הוא $G/\{e\} \cong G$ אבלי (שימו לב שלמרות של $\mathbb{Z}$ אין סדרת הרכב, היא בכל זאת חבורה פתירה).
2. **כל** חבורה G פשוטה שאינה אבלית **אינה** פתירה, כיוון שלא ניתן לעדן את הסדרה $G \rhd \{e\}$ כלל, והגורם שלה אינו אבלי.

תרגיל: הוכח S_4 פתירה.

הוכחה: $S_4 \rhd A_4 \rhd V_4 \rhd \{e\}$, וכל הגורמים הם אבליים: $(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_3,\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2)$.

דוגמא:

נסתכל על $GL_2(F)$ (F שדה). נגדיר $H=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1\end{bmatrix} \mid a\in F^*, b\in F\right\}$. בקיצור נרשום $H=\left\{\begin{bmatrix} * & * \\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$. אזי $H \le GL_2(F)$ (בדקו זאת). כעת ניתן להגדיר את הסדרה הנורמלית:

$$\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right\} \triangleleft \left\{\begin{bmatrix}1&*\\0&1\end{bmatrix}\right\} \triangleleft \left\{\begin{bmatrix}*&*\\0&1\end{bmatrix}\right\}$$

אכן מדובר בסדרה נורמלית, משמאל זאת החבורה הטריויאלית, והחבורה האמצעית היא הגרעין של ההומ' $\varphi: H \to (F^*,\cdot,1)$ המוגדר ע"י $\varphi\left(\begin{bmatrix}a&b\\0&1\end{bmatrix}\right)=a$ (זאת העתקת הדטרמיננטה). הגורמים הם (משמאל לימין) $(F,+,0)$ ו- $(F^*,\cdot,1)$. הגורמים הם אבליים, ולכן החבורה פתירה. החבורה לאו דווקא בעלת סדרת הרכב (**מדוע?**).

__משפט:__ כל חבורה מסדר pq כאשר p,q ראשוניים היא פתירה.

__"הוכחה":__ ראינו בשיעור שחבורה מסדר pq אינה פשוטה (בעזרת משפטי סילוא ראינו שבהכרח $r_p=1$ או $r_q=1$), וקיימת לה תח"נ מסדר p או q. אם כך הגורמים יהיו של הסדרה הנורמלית יהיו $\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_q$ ואלה גורמים אבליים, ולכן החבורה פתירה.

__! משפט:__ יהיו $N \triangleleft G$. אזי G פתירה אם ורק אם N פתירה וגם G/N פתירה.

__משפט:__ כל חבורת-p היא פתירה.

__הוכחה:__ $|G|=p^n$. נוכיח באינדוקציה על n. עבור $n=1$ נקבל $G\cong\mathbb{Z}_p$, זאת חבורה אבלית ולכן פתירה. עבור $n>1$, אם החבורה אבלית אז סיימנו, אחרת בהכרח $\{e\}\triangleleft Z(G)\triangleleft G$, כיוון ש $Z(G)\neq G$ כי G אינה אבלית, וגם $Z(G)\neq\{e\}$ לפי נוסחת מחלקות הצמידות: $p^n=|G|=|Z(G)|+\sum_{|conj(x)|\geq 2}|conj(x)|$. $|conj(x)|$ מחלק את $|G|=p^n$, ולכן $|conj(x)|=p^{i_x}$. אם $|Z(G)|=1$ אזי $p^n=1+\sum_{|conj(x)|\geq 2}p^{i_x}$. אם נבצע מודולו p למשוואה נקבל $0\equiv 1 \pmod p$, סתירה.

לכן $|Z(G)|=p^i$ כאשר $0<i<n$, ו- $|G/Z(G)|=p^{n-i}$. לכן לפי הנחת האינדוקציה $Z(G)$, $G/Z(G)$ הן פתירות. ואז לפי המשפט נקבל ש G פתירה.

__תרגיל:__ הראו שכל חבורה G מסדר $p^a q^b$ כאשר p,q ראשוניים, $a,b\in\mathbb{N}$, וגם $q^t\not\equiv 1 \pmod p$ לכל $t=1,2,...,b$, אזי G פתירה.

__פתרון:__ $r_p\equiv 1 \pmod p \ \wedge\ r_p \mid q^b$. לפי תנאי התרגיל נקבל שבהכרח $r_p=1$. לכן H_p ת"ח p-סילוא של G היא ת"ח נורמלית. לכן H_p היא פתירה כי היא חבורת-p, וגם $|G/H_p|=q^b$, כלומר G/H_p היא חבורת-q ולכן פתירה. אם כך לפי המשפט נקבל ש G פתירה.

__תרגיל:__ הראו שחבורה G מסדר pqr, כך ש $p<q<r$ וגם $pq<r$ היא חבורה פתירה. (r,p,q ראשוניים).

__פתרון:__ $r_r \mid pq \Rightarrow r_r\in\{1,p,q,pq\}$ אבל p,q,pq כולם קטנים מ r ולכן שונים מ 1 מודולו r. לכן $r_r=1$, ונקבל שת"ח r-סילוא H_r היא ת"ח נורמלית מסדר r ולכן היא ציקלית, ולכן פתירה. כעת G/H_r היא חבורה מסדר pq ומראים בצורה דומה שגם היא פתירה.

<u>הקומוטטור:</u>

<u>הגדרה:</u> תהי G חבורה. תהי $a,b\in G$ הקומוטטור של a,b מוגדר כ $[a,b]=aba^{-1}b^{-1}$.

<u>תת-חבורה הקומטטור</u> מוגדרת כ $G':=<\{[a,b]\,|\,a,b\in G\}>$ - כלומר התת חבורה הנוצרת ע"י כל הקומוטטרים.

<u>שאלה:</u> מתי $[a,b]=e$? תשובה אם"ם $ab=ba$.

<u>משפט:</u> G אבלית אם ורק אם $G'=\{e\}$.

<u>שאלה:</u> $[a,b]^{-1}$? תשובה: $[a,b]^{-1}=(aba^{-1}b^{-1})^{-1}=bab^{-1}a^{-1}=[b,a]$.

<u>משפט:</u> $G'\lhd G$

<u>טענה:</u> אם G חבורה פשוטה שאינה אבלית אז $G'=G$.

<u>הוכחה:</u> $G'\lhd G$ לפי משפט קודם בנוסף מכיוון ש G אינה אבלית אז $G'\neq\{e\}$ ולכן מכיוון ש G פשוטה אז $G'=\{\cancel{e}\}\vee G=G$.

<u>משפט:</u> לכל חבורה G, חבורת המנה G/G' אבלית.

<u>משפט:</u> אם $H\leq G$ אז $H'\leq G'$.

<u>תרגיל:</u> אם $N\lhd G$ וגם G/N אבלית אז $G'\leq N$.

<u>פתרון:</u> $G'\leq Ker\pi=N$ כאשר $\pi:G\to G/N$ הוא ההומ' הטבעי. זאת כיוון ש $\pi([a,b])=[a,b]N=aba^{-1}b^{-1}N=aNbNa^{-1}Nb^{-1}N=aNbN(aN)^{-1}(bN)^{-1}=[aN,bN]=N$.
השיויון האחרון מימין נובע בגלל ש G/N אבלית.

<u>הגדרה:</u> **סדרת הקומטטור** של חבורה G מוגדרת באינדוקציה ע"י $G^{(0)}=G,G^{(i+1)}=(G^{(i)})'$.

<u>משפט:</u> G חבורה פתירה אם"ם קיים t סופי כך ש $G^{(t)}=\{e\}$.

<u>משפט:</u> $(S_n)'=A_n$ עבור $n\geq 5$.

<u>משפט</u> $n\geq 5$, $(A_n)'=A_n$ כי A_n חבורה פשוטה.

<u>מסקנה:</u> לכן לפי משפט קודם אין t סופי שעבורו $(S_n)^{(t)}=\{e\}$ ולכן לפי משפטים קודמים S_n אינה פתירה עבור $5\leq n$.

תרגיל ממבחן: הוכיחו או הפריכו: כל חבורה מסדר 60 היא פתירה. נפריך: A_5 היא חבורה מסדר 60, ואינה פתירה, כיוון שהסדרה $A_5 \triangleright \{1\}$ היא סדרת הרכב (A_5 היא פשוטה) ולכן לא קיימת לא סדרה בה הגורמים הם חבורות אבליות.

תרגיל: הוכיחו שהחבורה הבאה פתירה: $G=\left\{\begin{bmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \mid a,b,c\in F\right\}$ כאשר F שדה.

פתרון: הערה: אם השדה F סופי (עובדה: כל שדה סופי הוא מסדר p^k כאשר p ראשוני) אזי הסדר של G הוא p^{3k} ואז החבורה היא חבורת p ולכן החבורה פתירה.

נסמן בכתיב מקוצר $\begin{bmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=(a,b,c)$. נקבל לפי כפל המטריצות ש:

$(a,b,c)*(d,e,f)=(a+d,e+b+af,c+f)$. כיוון שהיחידה היא $(0,0,0)$ נקבל ש $(a,b,c)^{-1}=(-a,ac-b,-c)$. לכן נקבל ש:

$$[(a,b,c),(d,e,f)]=(a,b,c)(d,e,f)(-a,ac-b,-c)(-d,df-e,-f)=(0,*,0)$$

לכן $G'=\left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & b\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \mid b\in F\right\}$. החבורה G' היא אבלית, ולכן $G''=\{1\}$, ולכן החבורה פתירה.