תרגול לינארית מס' 3

6 בנובמבר 2012

1 פולינום אופייני

תזכורת: הפולינום האופייני של מטריצה A מוגדר כ $f_A(\lambda) = det(\lambda I - A)$. הערכים העצמיים של הינם השורשים של הפולינום המינימלי. עבור העתקה לינארית Tנבחר בסיס כלשהו Bונבנה מתריצה המייצגת $[T]_B^B$ העתקה ביחס לבסיס B . נגדיר $f_T(\lambda) := det\left(\lambda I - [T]_B^B\right)$. ניקח בסיס אחר E ונתבונן במטריצה $[T]_E^E$. נשים לב שהטריצות דומות ומתקיים $[T]_E^E = P^{-1}[T]_B^B P$ כאשר E היא מתריצת מעבר מבסיס B לבסיס E. מכיוון λIהיא מטריצה סקלרית לכל λהיא מתלפת עם כל מטריצה, לכן $(\lambda I - [T]_E^E) = P^{-1}\left(\lambda I - [T]_B^B\right)P$. לכן הדטרמיננטות שלהן שוות. כלמר: $f_T(\lambda)$ מוגדר היטב ואינו תלוי בבחירת הבסיס.

תרגיל: הוכח, לכל מטריצה ריבועית $A \in M_n(\mathbb{F})$ מתקיים $f_{\alpha A}(\lambda) = \alpha f_A(\frac{x}{\alpha})$

פתרון: תהי A מטריצה. $det(\lambda I - \alpha A) = \alpha^n det(\frac{\lambda}{\alpha} I - A)$

תרגיל: הוכח / הפרך: אם לשתי מטריצות יש אותו פולינום אופייני אזי הן דומות.

פתרון: נפריך את הטענה. ניקח בלוק ז'ורדן $J_n(\lambda)$ ומטריצה סקלרית λI. יש להם אותו פולינום אופייני אבל המטריצות אינן דומות. מרחב העצמי המתאים ל λ של $J_n(\lambda)$ הוא ממימד 1, ועבוור λIהוא כל המרחב. לכן המטריצות אינן דומות.

הגדרה 1.1 יהי $\mathbb{F}$ שדה. אנו נסמן את אוסף כל הפולינומים בλמעל $\mathbb{F}$ ב $\mathbb{F}[\lambda]$.

תזכורת: יהי $f \in \mathbb{R}[\lambda]$. יהי $x \in \mathbb{C}$. אם x הוא שורש של f, אזי $\bar{x}$הוא שורש של f.

מסקנה: לכל מטריצה עם רכיבים ממשיים, אם יש לה ערך עצמי מרוכב אזי גם הצמוד שלו מרוכב.

תזכורת: יהי $\mathbb{F}$שדה, $f, g \in \mathbb{F}[\lambda]$ אנו אומרים ש f מחלק את g אם קיים h כך ש $fh = g$.

תזכורת: יהי V מרחב וקטורי, $T : V \to T$ ו W מרחב וקטורי כך ש $TW \subseteq W$. אזי Wנקרא מרחב T אינווריאנטי.

תרגיל: יהי V מרחב וקטורי, $T : V \to V$ העתקה לינארית, Wמרחב T אינווריאנטי. נתבונן ב $T|_W$ (T מצומצמת לW). נתבונן בפולינום האופייני $f_{T|_W}(\lambda)$. הוכח $f_{T|_W}(\lambda) | f_T(\lambda)$.

פתרון: אם $W=V$ אין מה להוכיח. אחרת יהי $w_1,\dots w_k$ בסיס של W. נשלים אותו לבסיס B של V עם וקטורים $v_1,\dots v_{n-k}$. נתבונן במטריצה המייצגת של T ביחס לבסיס B. לכל $1\le i\le k$ מתקיים $T(w_i)\in W$, לכן קיימים ויחידים $a_1^{(i)},\dots,a_k^{(i)}$ כך ש $T(w_i)=a_1^{(i)}w_1+\dots a_k^{(i)}w_k$. מתריצה המייצגת של ביחס לבסיס $[T]_B^B$ נראית כך:

$$\begin{pmatrix} a_1^{(1)} & \cdots & a_1^{(k)} & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & * & \\ a_k^{(1)} & \cdots & a_k^{(k)} & & & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{k+1}^{(k+1)} & & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & a_n^{(k+1)} & \cdots & a_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

והפולינום האופייני יראה כך

$$f_T(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda-a_1^{(1)} & \cdots & -a_1^{(k)} & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & * & \\ -a_k^{(1)} & \cdots & \lambda-a_k^{(k)} & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda-a_{k+1}^{(k+1)} & & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & -a_n^{(k+1)} & \cdots & \lambda-a_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

מתקיים

$$f_T(\lambda)=det\begin{pmatrix} \lambda-a_1^{(1)} & \cdots & -a_1^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_k^{(1)} & \cdots & \lambda-a_k^{(k)} \end{pmatrix} det\begin{pmatrix} \lambda-a_{k+1}^{(k+1)} & & \\ \vdots & \ddots & \\ -a_n^{(k+1)} & \cdots & \lambda-a_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

אבל

$$f_{T|_W}(\lambda)=det\begin{pmatrix} \lambda-a_1^{(1)} & \cdots & -a_1^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_k^{(1)} & \cdots & \lambda-a_k^{(k)} \end{pmatrix}$$

2 חילוק פולינומים

בהרצאה הוכחתם שלכל שני פולינומים $f(x),g(x)$ קיימים פולינומים r,q כך שמתקיים:

1. $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$
2. $\deg r(x)<\deg g(x)$

הטענה זו מאפרשת לנו להוכיח כמה תכונות מעניינות של פולינומים במשתנה אחד. ראשית: אנו נוכיח כי $r(x)$ הינו יחיד.

תרגיל: הוכח טענה זו.

פתרון: נניח ש קיימים $r_1(x), r_2(x), q_1(x), q_2(x)$ שמקיימים את שני התנאים. אזי

$$f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x) = q_2(x)g(x) + r_2(x)$$

אזי

$$q_1(x)g(x) - q_2(x)g(x) = r_2(x) - r_1(x)$$

מתקיים $\deg r_2(x) - r_1(x)$. מצד שני $\deg g(x) > \deg r_2(x) - r_1(x)$. מעלה של מכפלה של פולינומים קטנה מאחד ממעלה של אחד מהגורמים במכפלה אם ורק אם היא שווה ל 0. $0 = q_1(x)g(x) - q_2(x)g(x)$. לכן $r_2(x) = r_1(x)$.

הגדרה 2.1 עבור 2 פולינומים f, g אנו אומרים שפולינום מתוקן d הוא מחלק המשותף המקסימלי (gcd) שלהם אם הוא מחלק את f, g לכל פולינום מתוקן h שמחלק את f, g הוא מחלק את h.

אנו נשתמש בטענה הקודמת על מתת להוכיח כי d כזה קיים ושהוא יחיד. רעיון ההוכחה הוא כזה. נניח שיש לנו פולינומים f, g, r, q כמו בטענה מהארצאה. נשים לב שכל פולינום פולינום שמחלק ב f ו gבהכרח מחלק את g ו r ולהיפך. לפי הטענה אנו יכולים למצוא פולינומים q_2, r_2עבור g ו r, q_2, r_2 עבור q_3, r_3 עבור r_2, r_1 וכן הלאה. ובכל שלב, $\deg r_{n+1} < \deg r_n$ לקבל פולינום ממעלה קטנה יותר עד שהוא בסוף מתאפס. עלינו לבצע לכל היותר $\deg g +$ 1צעדים כאלה. ברגע ש $r_n \mid r_{n+1}$ אנו מקבלים באופן אוטומטי ש r_{n+1} מחלק את כל הקודמים, כולל את f ו g. בנוסף, נשים לב שבל שלב r_n הוא מהצורה $r_{n-2}(x) - qr_{n-1}(x)$. אם נציב לאחור אנו נקבל כי r_nניתן לבטא כביטוי מהצורה $a(x)f(x) + b(x)g(x)$.

דוגמא:

1. $3x^3 + 7x^2 + x + 1 = (3x+1)(x^2 + 2x + 2) - 7x - 1$
2. $x^2 + 2x + 2 = (-\frac{1}{7}x - \frac{13}{49})(-7x - 1) + \frac{85}{49}$
3. $-7x - 1 = \frac{85}{49}(-\frac{343}{85} - \frac{49}{85})$
4. ננרמל ונקבל שמחלק המשותף המקסומלי שלהם הוא 1.

יחידות של d נובעת מזה שאם יש לנו שני פולינומים שמחלקים אחד את השני, אם חייבים להיות כפילה אחד בשני במספר קבוע. מכיוון שמדובר בפולינומים מוניים, המספר הקבוע מוכרח להיות 1.

הגדרה 2.2 שני פולינומים ש f, g שהמחלק המשותף המקסימלי שלהם הוא 1 נקראים זרים.

תרגיל: אם g, f זרים, ו $g \mid fh$ עבור פולינום כלשהו h, $f \mid h$.

פתרון: כפי שנאמר אם $gcd(g, f) = 1$ קיימים a, b כך שמתקיים $a(x)f(x) + b(x)g(x) = 1$. $h = h \cdot 1 = h \cdot (a(x)f(x) + b(x)g(x))$ והטענה נובעת.

3 ריבוי גאומטרי וריבוי אלגברי

תזכורת: בהרצאה הגדרנו ריבוי אלגברי של ערך עצמי λב A כחזקה המקסימלית של $x-\lambda$ שמחלקת את $f_A(x)$ וריבוי גאומטרי של λכמימד של מרחב העצמי של λ.

תרגיל: תהי $T:V\to V$ העתקה נילפוטנטית. מצא את כל המקרים באם הריבוי אלגברי והריבוי הגאומטרי של הערים העצמיים בה שוה.

פתרון: הערך העצמי היחיד של T הוא 0. אם ריבוי הגאומטרי של 0 שווה לריבוי האלגברי של 0, אזי כל וקטור מתאפס על ידי T ו T הוא בהכרח העתקת ה0.

תרגיל: יהי $P_3[x]$מרחב כל הפולינומים במשתנה אחד ממעלה קטנה או שוה ל3. תהי $D:P_3[x]\to P_3[x]$ המוגדרת על ידי גזירת פולינום. ($x^n\mapsto nx^{n-1}$). מצא ריבוי את ריבוי אלגברי וריבוי גאומטרי של כל ערך עצמי של λ.

פתרון: אנו נשים לב ש D הינה העתקה נילפוטנטית ולכן הערך העצמי היחיד שלה הוא 0. הוכח, לכן הריבוי האלגברי שלה הוא 4. נשים לב ־ פולינום מתאפס על ידי גזירה אם ורק אם הוא פולינום קבוע (אם זה לא רץ ־ מן הסתם לעשות עם מטריצה).