תרגיל בית 3 - טופולוגיה

**שאלה 1**

יהי  מ"מ**.**

1. הוכיחו כי לכל**,** תת קבוצה סגורה של **.**
2. הסיקו כי כל תת קבוצה סופית של ****סגורה.

**שאלה 2**

1. הוכיחו ש- אינה סגורה ואינה פתוחה ב-.
2. הוכיחו שהקבוצה  סגורה ב-.
3. הוכיחו: כל מישור ב-  הוא סגור.
4. יהיהמרחב המטרי של המטריצות הריבועיות  עם מקדמיםממשיים(זהו המרחב המטרי  עם המטריקה האוקלידית). הוכיחו שקבוצת המטריצות ההפיכותפתוחה במרחב זה.

**שאלה 3**

1. הוכיחו/הפריכו: מטריקות שקולות מגדירות את אותה משפחה של קבוצות סגורות.
2. אילו מהמטריקות הבאות שקולות מעל  : (המטריקה הדיסקרטית) , (המטריקה ה-7 אדית),  (המטריקה ה-5 אדית) והמטריקה הסטנדרטית  המוגדרת ע"י  (הוכיחו את תשובתכם!).
3. נגדיר שתי מטריקות על . עבור , . הוכיחו או הפריכו: שתי המטריקות הן שקולות.
4. תהי . נגדיר על קבוצה זו שתי מטריקות: , . הוכיחו או הפריכו: שתי המטריקות הן שקולת.

**שאלה4**

1. יהיו  מטריקות שקולות מעל . יהיו מטריקות שקולות מעל . נניח ש-  רציפה. הוכיחו או הפריכו: הפונקציה רציפה.
2. יהיו  מטריקות כלשהן מעל . יהיו מטריקות כלשהן מעל . נניח ש-  רציפה. הוכיחו או הפריכו: הפונקציה רציפה.

**שאלה 5**

תהי  פונקציה בין שני מרחבים מטריים.

1. הוכיחו:  רציפה אמ"מ  פתוחה ב- לכל כדור פתוח.
2. הראו שהטענה האנלוגית עבור כדורים סגורים אינה נכונה. כלומר, מצאו שני מרחבים מטריים ופונקציה בינהם , כך ש- אינה רציפה למרות שכן מתקיים התנאי הבא:  סגורה ב- לכל כדור סגור .

**שאלה 6**

נתבונן במרחב : מרחב כל הפונקציות הרציפות  עם מטריקת המקסימום.

1. תהי . נגדיר פונקציה  על-ידי . הוכיחו כי זו פונקציה רציפה.
2. הוכיחו/הפריכו: הקבוצה  היא קבוצה פתוחה ב-.

**בהצלחה!**