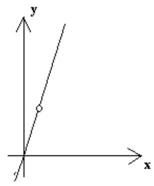
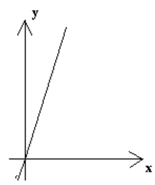
<u>שיעור 3</u>

<u>מיון נקודות אי רציפות</u>

<u>נקודת אי רציפות סליקה</u>

לפני שנגדיר נקודת אי רציפות סליקה נתחיל בדוגמא.

נתבונן בגרף של הפונקציה $f(x)=2x$ ובגרף של הפונקציה $f(x)=\dfrac{2x^2-2x}{x-1}$.

נשים לב שהפונקציות זהות לחלוטין למעט נקודה אחת $(1,2)$.

אם נוסיף את הנקודה $(1,2)$ לגרף השמאלי נקבל פונקציה רציפה שהיא הגרף הימני.

נקודה $(1,2)$ ממחישה את ההגדרה של נקודת אי רציפות סליקה. כעת נעבור להגדרה הפורמאלית.

<u>הגדרה</u>

אם הגבולות החד צדדיים ב x_0 (במובן הצר) קיימים ושווים אבל הגבול שונה מ $f(x_0)$ או ש $f(x)$ כלל אינה מוגדרת בנקודה x_0, אז לפונקציה יש ב x_0 נקודת אי רציפות סליקה.

<u>דוגמאות</u>

1. בדוגמא הקודמת הפונקציה $f(x)=\dfrac{2x^2-2x}{x-1}$ לא מוגדרת בנקודה $x_0=1$ ומתקיים $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ ולכן לפונקציה יש נקודת אי רציפות סליקה ב $x_0=1$.
2. נתבונן בפונקציה $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x-10}{x-2} & x\neq 2\\ 3 & x=2\end{cases}$. במקרה זה $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=7\neq f(2)$ אומנם הפונקציה מוגדרת ב $x_0=2$ אבל היא עדיין אי רציפה בנקודה זו.

<u>אי רציפות מסוג ראשון</u>

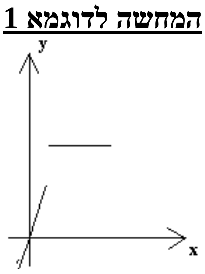
<u>הגדרה</u>

אם הגבולות החד צדדיים ב x_0 קיימים ושונים (במובן הצר) נאמר שהפונקציה אי רציפה מסוג ראשון.

<u>דוגמא 1</u>

נתבונן בפונקציה $f(x)=\begin{cases}6 & x>2\\ 2x & x\leq 2\end{cases}$. במקרה זה מתקיים $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$.

<u>המחשה לדוגמא 1</u>



דוגמא 2

$f\left(x\right)=\frac{\left|\sin x\right|}{x}+3$ מכיוון ש $\lim_{x\to 0^-} f\left(x\right)=2, \lim_{x\to 0^+} f\left(x\right)=4$ נקבל שהפונקציה אי רציפה מסוג ראשון בנקודה $x_0=0$.

אי רציפות מסוג שני

נקודה x_0 נקראת נקודת אי רציפות מסוג שני של הפונקציה $f\left(x\right)$ אם:

א. $f\left(x\right)$ מוגדרת בסביבת הנקודה x_0 , פרט אולי ל x_0 עצמה.

ב. לפחות אחד מן הגבולות החד צדדיים בנקודה x_0 אינו קיים.

דוגמא 1

הפונקציה $f\left(x\right)=\sin\frac{1}{x-1}$ אי רציפה מסוג שני בנקודה $x_0=1$ מכיוון ש $\lim_{x\to 1^+} f\left(x\right)$ אינו קיים, במקרה זה גם הגבול $\lim_{x\to 1^-} f\left(x\right)$ לא קיים.

דוגמא 2

$f\left(x\right)=\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}$ במקרה זה הגבול $\lim_{x\to 0^+} f\left(x\right)$ קיים אבל הגבול $\lim_{x\to 0^-} f\left(x\right)$ לא קיים ולכן הנקודה $x_0=0$ היא נקודת אי רציפות מסוג שני.

מציאת נקודות קיצון

משפט פרמה (ראינו שיעור שעבר)

תהיי $f\left(x\right)$ פונקציה המוגדרת בקטע הפתוח $\left(a,b\right)$ וגזירה בנקודה פנימית x_0. אם $f\left(x\right)$ מקבלת בנקודה x_0 את ערכה הגדול ביותר או את ערכה הקטן ביותר אזי $f'\left(x_0\right)=0$.

עבור פונקציה נתונה $f\left(x\right)$ פתרון המשוואה $f'\left(x\right)=0$ וערכי x שעבורם הפונקציה לא מוגדרת נותן נקודות חשודות לקיצון הנקראות גם נקודות קריטיות.

דוגמא

נמצא את נקודות הקריטיות של הפונקציה $f\left(x\right)=\sqrt{x}\ln^2 x$.

$$f'\left(x\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln^2 x+\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}\cdot 2\ln x\Rightarrow\frac{\ln^2 x}{2\sqrt{x}}+\frac{2\ln x}{\sqrt{x}}=0\Rightarrow\ln^2 x+4\ln x=0$$

נציב $t=\ln x$ ונקבל $t_1=0,t_2=-4\Leftarrow t^2+4t=0$.

נציב חזרה ונקבל $x=1\Leftarrow\ln x=0$, $x=\frac{1}{e^4}\Leftarrow\ln x=-4$ קיבלנו שהנקודות החשודות לקיצון הן $\left(1,0\right),\left(\frac{1}{e^4},\frac{16}{e^2}\right)$.

נשים לב שהנגזרת מוגדרת בכל תחום ההגדרה של הפונקציה.

דרכים לקבוע האם נקודת קיצון היא מינימום או מקסימום

מבחן הנגזרת הראשונה

תהי x_0 נקודה קריטית של הפונקציה $f\left(x\right)$, ונניח כי $f\left(x\right)$ רציפה בנקודה x_0 , גזירה בסביבת הנקודה x_0 פרט אולי לנקודה x_0 עצמה. אזי

א. אם $f'(x)$ מחליפה סימן משלילי לחיובי בנקודה x_0 אזי x_0 היא נקודת מינימום מקומי של $f(x)$.

ב. אם $f'(x)$ מחליפה סימן מחיובי לשלילי בנקודה x_0 אזי x_0 היא נקודת מקסימום מקומי של $f(x)$.

ג. אם $f'(x)$ שומרת סימן בנקודה x_0 אזי x_0 אינה נקודת קיצון של $f(x)$.

<u>תרגיל</u>

נתונה הפונקציה $f(x)=|x-2.25|e^{x^2}$.

א. מצא את הנקודות הקריטיות של הפונקציה.

ב. קבע עבור כל נקודה מסעיף א האם היא נקודת מינימום/מקסימום/לא נקודת קיצון.

<u>פתרון</u>

א. ניתן לרשום את הפונקציה באופן הבא: $f(x)=\begin{cases}(x-2.25)e^{x^2} & x>2.25\\ -(x-2.25)e^{x^2} & x\le 2.25\end{cases}$.

עבור $x>2.25$ נקבל ש $f'(x)=e^{x^2}+2x(x-2.25)e^{x^2} \Leftarrow f'(x)=(2x^2-4.5x+1)e^{x^2}$.

עבור $x<2.25$ נקבל ש $f'(x)=-(2x^2-4.5x+1)e^{x^2}$.

נשים לב ש $f'_+(2.25)=e^{5.0625}$ ו $f'_-(2.25)=-e^{5.0625}$.

הנגזרות החד צדדיות לא שוות בנקודה $x=2.25$, ולכן הנגזרת לא קיימת.

כדי לבדוק לאילו ערכי x הנגזרת מתאפסת נפתור את המשוואה $2x^2-4.5x+1=0$.

$x_1=2, x_2=\frac{1}{4}$.

סה"כ קיבלנו שהנקודות הקריטיות הן: $\left(\frac{1}{4},2e^{\frac{1}{16}}\right),\left(2,\frac{e^4}{4}\right),(2.25,0)$.

ב.

נבדוק עבור כל אחד מהמקרים האם הנגזרת מחליפה סימן.

ראינו כבר שעבור $x=2.25$ הנגזרת מחליפה סימן משלילי לחיובי ז"א $(2.25,0)$ היא נקודות מינימום.

מכיוון שהנגזרת מוגדרת בכל נקודה בקטע $(2,2.25)$ נקבל ממשפט רול שלכל $x\in(2,2.25)$ הנגזרת לא משנה סימן ז"א ניתן להציב כל x בקטע כדי לדעת את סימן הנגזרת אחרי $x=2$.

נקבל ש $f'(2.1)$ שלילי.

באותו אופן נבחר נקודה בקטע $\left(\frac{1}{4},2\right)$. $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ חיובי.

סה"כ קיבלנו שהנגזרת משנה סימן בנקודה מחיובי לשלילי ולכן הנקודה $\left(2,\frac{e^4}{4}\right)$ היא נקודת מקסימום.

עבור $x=\frac{1}{4}$. נציב בנגזרת נקודה מהקטע $\left(-\infty,\frac{1}{4}\right)$ נניח 0 ונקבל ש $f'(0)$ שלילי.

ראינו ש $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ חיובי.

הנגזרת ב $x=\frac{1}{4}$ משנה סימן משלילי לחיובי, ולכן הנקודה $\left(\frac{1}{4},2e^{\frac{1}{16}}\right)$ היא נקודת מינימום.

<u>מבחן הנגזרת השנייה</u>

תהיי x_0 נקודה קריטית של הפונקציה $f(x)$, ונניח כי $f(x)$ גזירה פעמיים בנקודה x_0 . אזי

א. אם $f''(x)>0$ אז x_0 היא נקודת מינימום מקומי של $f(x)$.

ב. אם $f''(x)<0$ אז x_0 היא נקודת מקסימום מקומי של $f(x)$.

ג. אם $f''(x)=0$ אז לא ניתן לדעת כלום על x_0 משיטה זו ויש לבדוק את הנקודה x_0 בשיטה אחרת.

<u>הערה</u>

נשים לב שלא ניתן להשתמש במבחן הנגזרת השנייה בתרגיל הקודם עבור $x=2.25$ מכיוון שהנגזרת לא מוגדרת שם.

<u>תרגיל</u>

מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)=6\sqrt[3]{x}-\ln x$.

<u>פתרון</u>

נמצא תחילה את הנקודות הקריטיות $f(x)=6x^{\frac{1}{3}}-\ln x \Leftarrow f'(x)=2x^{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{x} \Leftarrow f'(x)=\frac{2}{x^{\frac{2}{3}}}-\frac{1}{x}$.

נפתור את המשוואה $0=\frac{2}{x^{\frac{2}{3}}}-\frac{1}{x} \Leftarrow 0=2x-x^{\frac{2}{3}} \Leftarrow 0=x^{\frac{2}{3}}\left(2x^{\frac{1}{3}}-1\right)$ מכיוון ש $x\neq 0$ נקבל ש

$2x^{\frac{1}{3}}-1=0 \Rightarrow x^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{8}$.

קיבלנו נקודה קריטית $\left(\frac{1}{8},3+\ln 8\right)$.

נבדוק בעזרת מבחן הנגזרת השנייה האם הנקודה היא מינימום/מקסימום.

$$f'(x)=2x^{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{x} \Rightarrow f''(x)=-\frac{4}{3}x^{-\frac{5}{3}}+\frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(x)=-\frac{4}{3x^{\frac{5}{3}}}+\frac{1}{x^2} \Rightarrow f''\left(\frac{1}{8}\right)>0$$

והנקודה $\left(\frac{1}{8},3+\ln 8\right)$ היא נקודת מינימום.

<u>הערה</u>

נניח שהפונקציה $f(x)$ גזירה בסביבת הנקודה x_0 ו $f'(x_0)=0$.

אם $f'(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ אז מספיק לבדוק את הסימן של $\frac{g'(x_0)}{h(x_0)}$ כדי להשתמש במבחן הנגזרת השנייה.

<u>הסבר</u>

$$f'(x)=\frac{g(x)}{h(x)} \Leftarrow f''(x)=\frac{g'(x)h(x)-g(x)h'(x)}{h^2(x)} \Leftarrow f''(x_0)=\frac{g'(x_0)h(x_0)-g(x_0)h'(x_0)}{h^2(x_0)}$$

מכיוון ש $f'(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ ו $f'(x_0)=0$ נקבל ש $g(x_0)=0$ ואז

$$\frac{g'(x_0)}{h(x_0)}=\frac{g'(x_0)h(x_0)}{h^2(x_0)}=\frac{g'(x_0)h(x_0)-g(x_0)h'(x_0)}{h^2(x_0)}=f''(x_0)\ .$$

<u>תרגיל</u>

מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)=\frac{x\ln x}{\ln x-2}$.

<u>פתרון</u>

נגזור את הפונקציה ונשווה לאפס.

$$f(x)=\frac{x\ln x}{\ln x-2} \Leftarrow f'(x)=\frac{(\ln x+1)(\ln x-2)-\ln x}{(\ln x-2)^2}$$

יש לפתור את המשוואה $(\ln x+1)(\ln x-2)-\ln x=0$ נציב $t=\ln x$ ונקבל

$$(t+1)(t-2)-t=0 \Leftarrow t^2-2t-2=0 \Leftarrow t_1=1+\sqrt{3},t_2=1-\sqrt{3}\ .$$

הנקודות הקריטיות הן $x_1=e^{1+\sqrt{3}},x_2=e^{1-\sqrt{3}}$.

נשתמש בהערה הקודמת כדי לבדוק את סוג הקיצון.

מכיוון ש $(\ln x-2)^2>0$ מספיק לבדוק את סימן הנגזרת עבור $g(x)=\ln^2 x-2\ln x-2$.

$g'(x)=\frac{2\ln x-2}{x}$ ואז $g'\left(e^{1-\sqrt{3}}\right)<0,g'\left(e^{1+\sqrt{3}}\right)>0$.

עבור $x=e^{1+\sqrt{3}}$ נקבל מינימום ועבור $x=e^{1-\sqrt{3}}$ נקבל מקסימום.

<u>נקודות פיתול</u>

נאמר כי הנקודה x_0 היא נקודת פיתול של הפונקציה $f(x)$ אם $f(x)$ רציפה וגזירה בסביבת הנקודה x_0 כך שבסביבה שמשמאל ל x_0 הפונקציה קעורה כלפי מטה ובסביבה שמימין ל x_0 הפונקציה קעורה כלפי מעלה (או להפך).

<u>משפט</u>

תהיי $f(x)$ פונקציה גזירה פעמיים בסביבת הנקודה x_0. אם הנגזרת השנייה $f''(x)$ מחליפה סימן בנקודה x_0 אזי x_0 היא נקודת פיתול של $f(x)$.

<u>תרגיל</u>

מצא את נקודות הפיתול של הפונקציה $f(x)=x\sqrt{2x-1}$.

<u>פתרון</u>

נגזור פעמיים את הפונקציה ונשווה לאפס.

$$f(x)=x\sqrt{2x-1} \Leftarrow f'(x)=\sqrt{2x-1}+\frac{x}{\sqrt{2x-1}} \Leftarrow f''(x)=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}+\frac{\sqrt{2x-1}-\frac{x}{\sqrt{2x-1}}}{2x-1}$$

סה"כ נקבל ש $f''(x)=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}+\frac{2x-1-x}{(2x-1)\sqrt{2x-1}}$ יש לפתור את המשוואה $2x-1+2x-1-x=0$

נקודה חשודה לפיתול היא $x=\frac{2}{3}$ נשים לב ש $f''(x)=\frac{3x-2}{(2x-1)\sqrt{2x-1}}$ ואז עבור $x<\frac{2}{3}$ נקבל ש $f''(x)<0$ ועבור $x>\frac{2}{3}$ נקבל ש $f''(x)>0$ הנגזרת השנייה משנה סימן ולכן הנקודה $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$ היא נקודת פיתול.

<u>אסימפטוטה אנכית</u>

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה ימנית או בסביבה שמאלית של הנקודה $x=a$, פרט אולי לנקודה $x=a$ עצמה. אם לפחות אחד מן הגבולות $\lim_{x\to a^-} f(x), \lim_{x\to a^+} f(x)$ קיים במובן הרחב ושווה ∞ או $-\infty$ אז נאמר כי הישר $x=a$ הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה $f(x)$.

<u>דוגמאות</u>

1. $f(x)=\ln(2+x)$ הגבול $\lim_{x\to -2^+} f(x)=-\infty$ ולכן $x=-2$ אסימפטוטה אנכית.
2. $f(x)=\tan x$ נשים לב ש $f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}$ ולכן כאשר $\cos x$ מתאפס נקבל אסימפטוטה אנכית כלומר כאשר $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ (k שלם).
3. $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$ $\lim_{x\to 0^-} e^{-\frac{1}{x}}=\infty$ ולכן $x=0$ אסימפטוטה אנכית.

<u>אסימפטוטה משופעת</u>

הישר $y=ax+b$ נקרא אסימפטוטה משופעת של הפונקציה $f(x)$ ב $+\infty$ אם $\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$.

הישר הנ"ל ייקרא אסימפטוטה משופעת ב $-\infty$ אם $\lim_{x\to -\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$.

במקרה המיוחד $a=0$ האסימפטוטה נקראת גם האסימפטוטה האופקית של $f(x)$.

<u>משפט</u>

תהיי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע (a,∞). אם קיימים הגבולות $a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-ax\right]$

אז הישר $y=ax+b$ הוא האסימפטוטה המשופעת היחידה ב $+\infty$ של $f(x)$.

תהיי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע $(-\infty,c)$. אם קיימים הגבולות $a=\lim_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x}, b=\lim_{x\to -\infty}\left[f(x)-ax\right]$

אז הישר $y=ax+b$ הוא האסימפטוטה המשופעת היחידה ב $-\infty$ של $f(x)$.

<u>תרגיל</u>

מצא את כל האסימפטוטות לגרף של הפונקציה $f(x)=\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$.

<u>פתרון</u>

$\lim_{x\to -1^+}\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}=\lim_{x\to -1^-}\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}=-\infty$ ולכן $x=-1$ אסימפטוטה אנכית של $f(x)$.

נמצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^3}{x(x+1)^2}=1$.

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-ax\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x^2+2x-1}{(x+1)^2}=-5$$

לכן הישר $y=x-5$ הוא אסימפטוטה משופעת ב ∞ של $f(x)$.

נבדוק אסימפטוטה משופעת ב $-\infty$.

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x-1)^3}{x(x+1)^2}=1$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}-x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}-x\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{-5x^2+2x-1}{(x+1)^2}=-5$$

הישר $y=x-5$ הוא גם אסימפטוטה משופעת ב $-\infty$ של $f(x)$.

<u>תרגיל (במידה ויאפשר הזמן)</u>

חקור את הפונקציה $f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$ על פי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה של הפונקציה.
ב. נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ג. נקודות קיצון
ד. תחומי עליה וירידה.
ה. נקודות פיתול.
ו. אסימפטוטות.
ז. שרטוט הגרף.