

88-235 אנליזת פורייה – פתרון מועד א'

.1

א. מצאו את טור הסינוסים של $f(x) = \frac{\pi}{2}$

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin(nx)$$

ב. חשבו את הטורים הבאים

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) = \frac{\pi}{2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi^2}{4} dx = \frac{\pi^2}{4}$$

2. תהי $f \in E$ רציפה בקטע $[-\pi, \pi]$ בעלת נגזרת רציפה למקוטעין, כך ש

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

א. הביעו פונקציה g באמצעות f כך ש

$$g \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) - b_n \sin(nx)$$

$$g = f(-x)$$

ב. הביעו באמצעות f, g את

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \frac{f(\pi) + g(\pi)}{2}$$

ג. הביעו באמצעות f, g את

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(f-g)^2}{4} dx$$

3. תהי $f(x) = \begin{cases} ax + b & -\pi \leq x < 0 \\ \cos(x) & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ א. חשבו את סכום טור הפורייה של f בנקודות $x = \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$, הביעו תשובתכם באמצעות a, b .

$$\frac{-1 - \pi a + b}{2}, -\frac{\pi}{2} + b, \frac{1 + b}{2}$$

ב. עבור אילו ערכי a, b טור הפורייה של f יתכנס במ"ש בכל הממשיים? הוכיחו.

$$b = 1, a = \frac{2}{\pi}$$

4. תהי $f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi \leq x < \pi \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$ א. חשבו את התמרת הפורייה $\mathcal{F}[f](s) = \frac{\sin(\pi s)}{\pi s}$, בפרט מהו $\mathcal{F}[f](0) = 1$?ב. חשבו את $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin(\pi s) \cos(\pi s)}{s} ds = \pi$