תורת הקבוצות־ תרגיל בית 1

1. יהיו $(A,<_A),(B,<_B)$ שתי קבוצות זרות סדורות היטב. נגדיר יחס סדר $<$ על $A\cup B$ באופן הבא:

יהיו $x,y\in A\cup B$. אם $x,y\in A$ אז $x<y\iff x<_A y$. אם $x,y\in B$ אז $x<y\iff x<_B y$. ואם בה"כ $x\in A, y\in B$ אז $x<y$.
הוכיחו שזהו סדר טוב.
פתרון: תהי $C\subseteq A\cup B$. אם C מוכלת בA אז יש לC איבר ראשון בA, והוא יהיה גם האיבר הראשון ב$A\cup B$, מהגדרת הסדר על $A\cup B$.
כנ"ל לגבי המקרה ש$C\cup B$.
נניח ש $C\cap A\neq\emptyset$ כך $C\cap B\neq\emptyset$.
$A\subseteq C\cap A\neq\emptyset$ ולכן קיים $a\in C\cap A$ איבר ראשון ביחס לסדר על A. נוכיח שהוא איבר ראשון בC כתת קבוצה של $A\cup B$. ובכן, יהי $c\in C$. אם $c\in A$ אז $a<c$ בA ולכן ב $A\cup B$. אם $c\in B$ אז $a<c$ מהגרת הסדר על $A\cup B$. לכן aאיבר ראשון בC. מש"ל.

2. תהי A סדורה היטב. נסמן ב$A^{\mathbb{N}}$ את קבוצת הסדרות האינסופית מעל A. נגדיר יחס סדר על $A^{\mathbb{N}}$ באופן הבא: $(a_1,a_2,...)<(b_1,b_2,...)\iff a_i<b_i$ עבור $i=min\{j\in\mathbb{N}, a_j\neq b_j\}$.
הוכח/הפרך: זהו סדר טוב.
פתרון: נשים לב לקיומה של הסדרה האינסופית היורדת הבאה: $\{f_i\}$ כאשר $f_i(n)=\begin{cases}1 & n=i\\ 0 & n\neq i\end{cases}$.

3. תהי A קבוצה סדורה, $B\subseteq A$ קופינלית בA, $C\subseteq B$ קופינלית בB. הוכיחו שC קופינלית בA.
פתרון: יהי $a\in A$. צ"ל שקיים $c\in C$ כך ש $a\leq c$.
B קופינלית בA ולכן יש $b\in B$ כך ש $a\leq b$. Cקופינלית בB ולכן יש $c\in C$ כך ש $b\leq c$. מטרנזיטיביות הסדר, $a\leq c$.

4. יהיו A,B קבוצות סדורות קווית בנות יותר משני איברים, ויהי $A\times B$ עם הסדר המילוני הימני. הוכיחו/הפריכו:
א. אם A צפופה אז $A\times B$ צפופה.
ב. אם B צפופה אז $A\times B$ צפופה.
א. הפרכה: נקח $A=[0,1]$ ו$B=\{1,2\}$. בין $(1,1)$ ל$(0,2)$ אין שום איבר.
ב. הפרכה: נקח $B=\mathbb{Q}$, $A=\{1,2\}$. בין $(1,1)$ ל$(2,1)$ אין שום איבר.

5. הוכח/הפרך: יהיו A,B קבוצות סדורות. אם יש $f:A\to B$ שומרת סדר, ו$g:B\to A$ שומרת סדר, אז A וB איזומורפיות סדר.
פתרון: הפרכה: נקח: $A=[-1,1]$ ו$B=(1,1)$.
$f:A\to B$ שמוגדרת: $f(x)=x$ היא איזו' סדר. וכן $g:B\to A$ שמוגדרת $g(x)=\dfrac{x}{2}$ היא איזו' סדר. אולם A וB אינן איזומורפיות סדר, שכן לA יש איבר מינימום ולB אין.