צורה קנונית

הגדרה־ תהא A מטריצה. הצורה הקנונית של מצריצה Aהיא מטריצה המתקבלת ע"י פעולות אלמנטריות ומקיימת את התנאים הבאים:

- המטריצה בצורה מדורגת
- יש אפסים גם מעל המשתנים המובילים (בצורה המדורגת דרשנושיהיו אפסים מתחת לכל איבר מוביל פה אנו דורשים שיהיו אפסים גם מעל לכל משתנה מוביל מוביל)
- כל משתנה מוביל שווה ל־1

דוגמא סכמטית $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & * & * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & * & * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ כאשר הכוכביות אלו מתאימות למשתנים הבלתי תלויים של המערכת ויכולים להיות כל מספר.

הערה: בצורה קנונית ניתן לראות באופן ברור את הפתרון. דוגמא $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$.

$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ הוא פתרון המערכת.

הערה: משפט הצורה הקנונית של מטריצה היא יחידה (בניגוד לצורה מדורגת).

דוגמאות: המטריצה שדירגנו בכיתה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-2R_1\to R_3]{R_2-R_1\to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & 6 & 9 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_2\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & -6 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{3}R_2\to R_2]{-\frac{1}{6}R_3\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[R_1+R_3\to R_1]{R_2+2R_3\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2.5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1-2R_2\to R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1.5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \end{array}\right)$$

המטריצות המסומנות באדום הם הצגות שונות של הצורה המדורגת של המטריצה, המטריצה המסומנת בירות זוהי הצורה המדורגת הקנונית (והיא יחידה).
כמובן שאפשר לבצע דירוג קנוני תוך סדרת פעולות אלמנטריות שונה ממה שמוצג.

דוגמה נוספת: נדרג את המטריצה $\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\longleftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-kR_1\to R_3]{R_2-R_1\to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & 1-k \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{R_3}{1-k}\to R_3]{\frac{R_2}{k-1}\to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & (1+k) & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3+R_2\to R_3]{R_1-R_2\to R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & k+1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & k+2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{R_3}{k+2}\to R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k+1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k+2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2+R_3\to R_2]{R_1-(k+1)R_3\to R_1}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{k+2}+1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{k+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k+2} \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{k+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{k+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k+2} \end{array}\right)$$

זוהי הצורה המדורגת הקנונית, בצורה זו רואים מיד את וקטור הפיתרון אם קיים.