פתרון מועד א' – מד"ר – 88-240 – 29/01/19

זמן המבחן: 3 שעות. מבחן פתוח: כל חומר עזר מותר. משקל כל שאלה 22 נק', ענו על כל השאלות.

1. מצאו פתרון למד"ר $y'+x^2y'=1-y$ המקיים $y(0)=2$.

נשים לב שמדובר במד"ר לינארית $y'+\frac{1}{1+x^2}y=\frac{1}{1+x^2}$

ולכן הפתרון הוא

$$y=e^{-\int\frac{1}{1+x^2}dx}\left[c+\int\left(\frac{1}{1+x^2}e^{\int\frac{1}{1+x^2}dx}\right)dx\right]=e^{-\arctan(x)}\left[c+\int\left(\frac{1}{1+x^2}e^{\arctan(x)}\right)dx\right]=e^{-\arctan(x)}\left(c+e^{\arctan(x)}\right)$$

נציב את תנאי ההתחלה $2=c+1$ ולכן סה"כ הפתרון הוא $y=e^{-\arctan(x)}+1$

2. מצאו פתרון למד"ר $2xyy'+\cos(x)=-y^2$ המקיים $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

נראה שמדובר במד"ר מדויקת $Pdx+Qdy=\left(\cos(x)+y^2\right)dx+2xydy=0$, אכן $P_y=2y=Q_x$.

לכן $U=\int 2xydy+c(x)=xy^2+c(x)$ ומכאן $U_x=y^2+c'(x)=\cos(x)+y^2=P$.

כלומר $c'(x)=\cos(x)$ ולכן $c(x)=\sin(x)$ והפתרון נתון בצורה סתומה על ידי $U=xy^2+\sin(x)=c$.

נציב את תנאי ההתחלה ונקבל $0+1=c$ לכן $xy^2+\sin(x)=1$ לכן $y=\pm\sqrt{\frac{1-\sin(x)}{x}}$

(שני הפתרונות מקיימים את תנאי ההתחלה).

3. מצאו פתרון למד"ר $xy' = 2\sqrt{xy+x^2} + y$ המקיים $y(1) = 3$.

כיוון שנתון תנאי התחלה בנקודה 1, נפתור באיזור זה ונניח ש $x > 0$.

נחלק ב x ונקבל את המד"ר ההומוגנית $y' = \frac{2\sqrt{xy+x^2}+y}{x} = 2\sqrt{\frac{y}{x}+1} + \frac{y}{x} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

לכן לאחר ההצבה $z = \frac{y}{x}$ נקבל כי $\int \frac{1}{\varphi(z)-z}dz = \ln|x| + c$

כלומר $\sqrt{z+1} = \int \frac{1}{2\sqrt{z+1}+z-z}dz = \int \frac{1}{\varphi(z)-z}dz = \ln|x| + c$

נציב את תנאי ההתחלה ונקבל $c = \sqrt{3+1} = 2$

כלומר $z+1 = \left(\ln(x)+2\right)^2$ אבל $z = \frac{y}{x}$ ולכן סה"כ נקבל את הפתרון $y = x\left(\ln(x)+2\right)^2 - x$

4. מצאו פתרון למד"ר $xy''-xy'-y=0$ המקיים $y'(0)=1$, הביעו אותו באמצעות פונקציות אלמנטריות.

נחפש פתרון ששווה לטור חזקות $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$. כיוון ש $y'(0)=1$ נובע ש $a_1=1$

נציב במד"ר ונקבל $x\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2}-x\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=0$

כלומר $\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=0$

נזיז את האינדקס של הטור השמאלי ונקבל $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)a_{n+1}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=0$

לכן סה"כ $-a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(n(n+1)a_{n+1}-na_n-a_n\right)x^n=0$

לכן כל המקדמים מתאפסים, כלומר $a_0=0$ ולכל $n\geq 1$ מתקיים כי $n(n+1)a_{n+1}=(n+1)a_n$

כלומר $a_{n+1}=\frac{a_n}{n}$ וניתן להוכיח באינדוקציה כי לכל $n\geq 1$ מתקיים כי $a_n=\frac{1}{(n-1)!}$.

כלומר הפתרון הוא $xe^x=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}=y$.

5. מצאו פתרון למד"ר $x^2y''+xy'+y=\ln(x)$ המקיים $y(1)=1$, $y'(1)=1$.

ראשית נמצא פתרון למד"ר הלינארית ההומוגנית, הרי היא משוואת אוילר.

נציב x^r ונקבל $r(r-1)+r+1=0$ ולכן $r=\pm i$.

לכן הפתרונות למד"ר הינם $y_1=\cos\left(\ln(x)\right), y_2=\sin\left(\ln(x)\right)$

נמצא פתרון פרטי למד"ר הלינארית הלא הומוגנית $y''+\frac{1}{x}y'+\frac{1}{x^2}y=\frac{\ln(x)}{x^2}$ באמצעות וריאצית מקדמים:

נסמן $y_p=c_1(x)y_1+c_2(x)y_2$ ולכן

$$c_1'(x)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin\left(\ln(x)\right) \\ \frac{\ln(x)}{x^2} & \frac{1}{x}\cos\left(\ln(x)\right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos\left(\ln(x)\right) & \sin\left(\ln(x)\right) \\ \frac{-1}{x}\sin\left(\ln(x)\right) & \frac{1}{x}\cos\left(\ln(x)\right) \end{vmatrix}}=\frac{-\frac{1}{x^2}\ln(x)\sin\left(\ln(x)\right)}{\frac{1}{x}\left(\cos^2\left(\ln(x)\right)+\sin^2\left(\ln(x)\right)\right)}=-\frac{1}{x}\ln(x)\sin\left(\ln(x)\right)$$

$$c_1(x)=-\int\left(\frac{1}{x}\ln(x)\sin\left(\ln(x)\right)\right)dx=\left\{\begin{matrix} \ln(x)=t \\ \frac{1}{x}dx=dx \end{matrix}\right\}=-\int t\sin(t)dt=t\cos(t)-\sin(t)=$$
$$=\ln(x)\cos\left(\ln(x)\right)-\sin\left(\ln(x)\right)$$

באופן דומה

$$c_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix}\cos(\ln(x)) & 0\\ \frac{-1}{x}\sin(\ln(x)) & \frac{\ln(x)}{x^2}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos(\ln(x)) & \sin(\ln(x))\\ \frac{-1}{x}\sin(\ln(x)) & \frac{1}{x}\cos(\ln(x))\end{vmatrix}}=\frac{\frac{1}{x^2}\ln(x)\cos(\ln(x))}{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\ln(x)\cos(\ln(x))$$

$$c_2(x)=\int\left(\frac{1}{x}\ln(x)\cos(\ln(x))\right)dx=\left\{\begin{matrix}\ln(x)=t\\ \frac{1}{x}dx=dx\end{matrix}\right\}=\int t\cos(t)dt=t\sin(t)+\cos(t)=$$
$$=\ln(x)\sin(\ln(x))+\cos(\ln(x))$$

סה"כ הפתרון הפרטי הינו:

$$y_p=\left(\ln(x)\cos(\ln(x))-\sin(\ln(x))\right)\cos(\ln(x))+\left(\ln(x)\sin(\ln(x))+\cos(\ln(x))\right)\sin(\ln(x))=$$
$$=\ln(x)\left(\cos^2(\ln(x))+\sin^2(\ln(x))\right)=\ln(x)$$

לכן הפתרון הכללי הינו $y=a\cos(\ln(x))+b\sin(\ln(x))+\ln(x)$

נציב את תנאי ההתחלה $y(1)=1$ ונקבל $1=a$.

נגזור ונקבל $y=\frac{-1}{x}\sin(\ln(x))+\frac{b}{x}\cos(\ln(x))+\frac{1}{x}$

נציב את תנאי ההתחלה $y'(1)=1$ ונקבל $1=b+1$ ולכן $b=0$.

סה"כ הפתרון הינו $y=\cos(\ln(x))+\ln(x)$