פתרון תרגיל 1

11 במרץ 2018

1. תזכורת: $A_1 \triangle A_2 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1)$/
נגדיר: $A_1 \triangle A_2 \triangle ... \triangle A_n = (A_1 \triangle, , , \triangle A_{n-1}) \triangle A_n$).
תהיינה $A_1, A_2, ..., A_n$ קבוצות.
הוכיחו: $A_1 \triangle A_2 \triangle ... \triangle A_n = \{x | x \text{ in odd number of sets } A_i\}$. כלומר, קבוצת כל האיברים שנמצאים במס' אי־זוגי של קבוצות מתוך $A_1, A_2, ..., A_n$.
<u>פתרון:</u>

בסיס האינדוקציה: עבור $n = 2$ ברור כי מתקיים התנאי.

נניח שהתנאי מתקיים עבור n אזי:

$$\begin{aligned}
A_1 \triangle A_2 \cdots \triangle A_n \triangle A_{n+1} = (A_1 \triangle A_2 \cdots \triangle A_n) \triangle A_{n+1} = \\
\{x \mid (x \in (A_1 \triangle A_2 \cdots \triangle A_n) \wedge x \notin A_{n+1}) \\
\Rightarrow \text{according to the assumption x in odd number of } A_i \\
or \\
(x \in A_{n+1} \wedge x \notin (A_1 \triangle A_2 \cdots \triangle A_n)) \\
\Rightarrow \text{ x is in one grupe + even number} \\
\text{of grupes from } A_i \text{ (according to the assumption)}\}
\end{aligned}$$

הסבר: טעות נפוצה היא לטעון כך: $x \in A_1 \triangle A_2 \cdots \triangle A_n \triangle A_{n+1}$ אזי או ש־ $x \in A_1 \triangle A_2 \cdots \triangle A_n \wedge x \notin A_{n+1}$ ואז הוא במספר אי זוגי של קבוצות לפי הנחת האינדוקציה (שזה נכון). או ש־$x \in A_{n+1} \wedge x \notin A_1 \triangle A_2 \cdots \triangle A_n$ ולכן הוא נמצא בקבוצה אחת שזה מספר אי זוגי.

זה לא נכון, כי: מהטענה ש־$x \notin A_1 \triangle A_2 \cdots \triangle A_n$ לא נובע ש־x לא נמצא באף קבוצה (x יכול להיות בחלק מהקבוצות ולא להיות בהפרש). מה שכן אפשר

לומר, לפי הנחת האינדוקציה, אם $x \notin A_1 \triangle A_2 \cdots \triangle A_n$ אז x נמצא במספר זוגי של קבוצות $A_1, A_2, \cdots, A_n$. ולכן כיון ש $x \in A_{n+1}$ וגם במספר זוגי של הקבוצות $A_1, A_2, \cdots, A_n$ סה"כ x נמצא במספר אי זוגי של קבוצות.

2. תהי $A \subseteq U$ קבוצה (U הקבוצה האוניברסלית לדיוננו). נגדיר סדרת קבוצות באופן רקורסיבי:

$$A_0 = A$$

$$\forall 0 < n \in \mathbb{N} : A_n = A_{n-1}^c \cup A$$

הוכיחו שלכל n אי־זוגי $A_n = U$, ולכל n זוגי $A_n = A$..

<u>פתרון:</u>

עבור n אי־זוגי נוכיח באינדוקציה. בסיס: $A_1 = A_0^c \cup A = A^c \cup A = U$. נניח נכונות ל־$n$ ונוכיח ל־$n+2$:

$$A_{n+2} = A_{n+1}^c \cup A = (A_n^c \cup A)^c \cup A = (A_n \cap A^c) \cup A \overset{*}{=} (U \cap A^c) \cup A = A^c \cup A = U$$

כאשר בשיוויון $*$ השתמשנו בהנחת האינדוקציה.

כעת, עבור n זוגי: ראשית עבור $n = 0$ הדבר נכון לפי הגדרה. עבור $n \geq 2$ זוגי נשים לב ש־

$$A_n = A_{n-1}^c \cup A$$

אבל לפי מה שהוכחנו לגבי אי־זוגי נקבל ש $A_{n-1}^c = \phi$ ולכן נקבל

$$A_n = A_{n-1}^c \cup A = \phi \cup A = A$$

3. הוכיחו שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

<u>פתרון:</u>

בסיס האינדוקציה: עבור $n = 1$ נקבל $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1 \cdot 2}$.

נניח נכונות ל־n ונוכיח עבור $n+1$. כלומר צריך להוכיח את הגרירה:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} \Rightarrow \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

ואכן נקבל:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

כאשר השיוויון נובע מהנחת האינדוקציה. כעת נעשה מכנה משותף ונקבל:

$$\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$$

כדרוש.