1 ניר-לב 19/3/13

אנליזה מודרנית 2

①

levnir@math.biu.ac.il

ספרי לימוד: י"ס לינדנשטראוס וכו' אנליזה פונקציונלית — לא יתקיים שיעור ב 6/5

Eidelman, Milman, Tsolomitis, Functional Analysis — 4/13 שיעור השלמה: יום א' 10-12

Kolmogorov, Introduction Real Analysis

* מרחבים לינאריים נורמיים

• מרחב לינארי: קבוצה X של איברים עם פעולות: $x+y$, $\lambda\cdot x$ $\lambda\in\mathbb{C}/\mathbb{R}$

• נורמה: לכל וקטור x מתאים מספר $x\mapsto\|x\|$

תכונות ① ממשי ● אי שלילי $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$ $\|x\|\geq 0$

② $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ — אינטואיציה = אורך של הוקטור

③ $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ אי שוויון המשולש

• מטריקה (מרחק): $d(x,y) = \|x-y\|$

• כדור פתוח $B(x,r) = \{y\in X : \|x-y\| < r\}$

• התכנסות: $x_n\to x$ אם $\|x_n - x\| \to 0$ (הגדרה)

• $A\subset X$ נקראת "קבוצה פתוחה" אם

$$\forall a\in A \quad \exists\, \varepsilon>0 \ : \ B(a,\varepsilon)\subset A$$

• $A\subset X$ נקראת "קבוצה סגורה"

$$\forall \{a_n\}\subset A \quad a_n\to a \Rightarrow a\in A$$

גבול חייב להיות בקבוצה

* דוגמאות למרחבים לינאריים נורמיים

• $X\in\mathbb{R}^d$ $X=(x_1,\dots,x_d)$ $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{d}|x_k|^2}$ נורמה סטנדרטית

• נסמן $C(I)$ = מרחב כל הפונקציות הרציפות בקטע I (סגור)

$\|f\| = \max_{t\in I}|f(t)|$ — לפונקציה רציפה על קטע סגור יש max

• $f_n\to f$ $\max_{t\in I}|f_n(t)-f(t)| \to 0$ התכנסות במ"ש

תרגיל: במרחב $C(I)$ להראות כי $A=\{f: |f(t)|>1 \ \forall t\in I\}$ קבוצה פתוחה

תרגיל: נחליף $\geq$ במקום $>$ אזי זו קבוצה סגורה

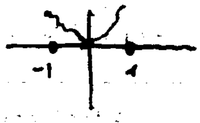
18/3/13
למניינים!!

אנליזה מודרנית 2

(2)

הגדרה: $Y \subset X$ נקרא תת"מ לינארי אם $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in Y \quad \forall y_1, y_2 \in Y$

• **דוגמא:** $C[-1,1]$ $\quad Y = \{f : f(0)=0\}$



עבור $1=$ כבר לא היה עובד כי סכומם הוא לא 0

• Y נקרא "<u>תת מרחב סגור</u>" אם הוא תת מרחב לינארי וגם קבוצה סגורה.

• **תרגיל:** במרחב $C[-1,1]$ להוכיח כי $Y = \{f(t) = at^2+bt+c\}$ תת"מ סגור

• <u>מימד של מרחב לינארי</u> - גודל מקסימלי של קבוצה בת"ל

דוגמא: $e_1 = (1,0,\dots,0)$ $\quad \dim \mathbb{R}^d = d$

$\vdots$

$e_d = (0,\dots,1)$

$\dim C(I) = +\infty$

$\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ קבוצה בת"ל

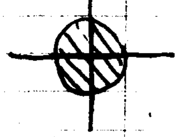
• כדור היחידה הפתוח: $B = \{x \in X : \|x\| < 1\}$

תרגיל: הראו כי B קבוצה סגורה

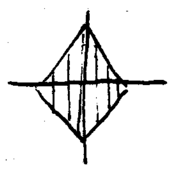
דוגמא: $X = \mathbb{R}^2 = \{(x_1,x_2)\}$

• נניח $X = \ell_2^{(2)}$ (מימד, נורמה) $\quad \|X\|_2 = \sqrt{x_1^2+x_2^2} \le 1$

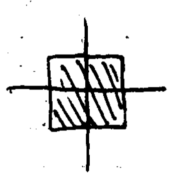
כדור אוקלידי



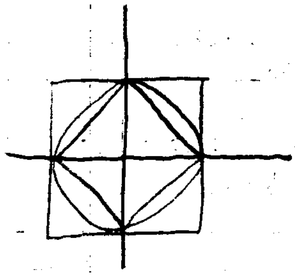
• $\ell_1^{(2)}$ (מימד, נורמה), $\quad \|X\|_1 = |x_1| + |x_2| \le 1$



$\ell_\infty^{(2)}$ $\quad \|X\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\} \le 1$



הומוגניות: $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$



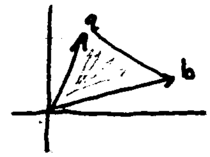
לכל $1 \le p < \infty$ נגדיר $\ell_p^{(2)}$ $\quad \|x\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

אנליזה מודרנית 2 ③

תרגיל: להוכיח $\lim_{p\to\infty}\|x\|_p = \|x\|_\infty$

∘ קמירות: X מרחב לינארי, $a,b \in X$

ק"ל $= [a,b] = \{\lambda a + (1-\lambda) b \in X : 0 \le \lambda \le 1\}$



$Y \subset X$ נקראת קבוצה "קמורה" אם:

$\forall a,b \in Y \ , \ [a,b] \subset Y$

טענה: X מרחב לינארי נורמי, $B = \{x : \|x\| \le 1\}$ אזי B קבוצה קמורה.

$a,b \in B \overset{?}{\dashrightarrow} [a,b] \subset B$

$\|\lambda a + (1-\lambda) b\| \le \|\lambda a\| + \|(1-\lambda) b\| = \overset{\text{חיובי מהגדרה}}{\lambda}\overset{\le 1}{\|a\|} + \overset{\text{חיובי}}{(1-\lambda)}\overset{\le 1}{\|b\|}$

$\le \lambda + (1-\lambda) = 1$

הערה: $x \in B \Rightarrow -x \in B$

• תרגיל רשות: נניח X מרחב לינארי (ללא נורמה) נניח $B \subset X$

קבוצה כך ש ① B קמורה ② $x \in B \Rightarrow -x \in B$

③ לכל $a \in X$ $\quad B \cap \{\lambda a : \lambda \ge 0\} = [0, x]$

אזי יש נורמה כך ש $B = \{x : \|x\| \le 1\}$

• אי שוויון המשולש

$\ell_p^{(d)} = \{x = (x_1, \dots, x_d)\}$

$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{d} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ צ"ל: $\|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$

$p=1$: ברור , $p=2$: נובע מאי קושי שוורץ

18/3/13
לאנגליש!

בס"ד

אנליזה מרוכבת 2 (4)

<u>הוכחה</u> עבור $1<p<\infty$

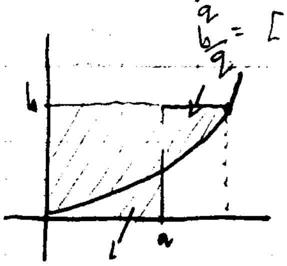
<u>טענה:</u>

(i) $a,b>0$

$$a\cdot b \le \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q} \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

p,q מספרים צמודים במובן שהם מקיימים את השוויון הנ"ל

$\frac{b^q}{q} = [\ ] - \int$ של



$a\cdot b$ שטח המלבן

$$\frac{a^p}{p}=\int_0^a x^{p-1}$$

נתבונן בפונקציה $y=x^{p-1}$

וקיבלנו שהשטח של $\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$ גדול משטח המלבן.

(ii) $$\left|\sum_{k=1}^d x_k y_k\right| \le \frac{1}{p}\sum_{k=1}^d |x_k|^p+\frac{1}{q}\sum_{k=1}^d |y_k|^q$$

(iii) $$\|x\|_p=1,\quad \|y\|_q=1 \Rightarrow \left|\sum_1^d x_k y_k\right|\le 1$$

(iv) $$\forall x,y,\quad \left|\sum x_k y_k\right| \le \|x\|_p\cdot\|y\|_q$$ <u>Hölder</u> א"ש

עבור $p=q=2$ א"ש קושי שוורץ

(v) $$\sup_{y:\|y\|_q\le 1}\left|\sum_{k=1}^d x_k y_k\right| = \|x\|_p$$ נתון x_k

$\le$ זה ברור (מה"ש) אבל יש y שמשיגים שוויון

(vi) $$\|x+y\|_p=\sup_{\|z\|_q\le 1}\left|\sum_k (x_k+y_k)z_k\right|$$

$$\le \sup_z\left|\sum x_k z_k\right|+\sup_z\left|\sum y_k z_k\right| = \|x\|_p+\|y\|_p$$

<u>תרגיל:</u> להשלים את כל הפרטים בהוכחה

הוכחנו: א"ש מינקובסקי $\|x+y\|_p\le\|x\|_p+\|y\|_p$

- עבור $p\to\infty$ נקבל גם $\|x+y\|_\infty\le\|x\|_\infty+\|y\|_\infty$ (הוכחה ישירה)

3 18/3/13
למנויים:

אנליזה מודרנית 2

5

אם מקטינים את p הנורמה גדלה

$1 \le p \le p' \le \infty$ טענה: $\|x\|_{p'} \le \|x\|_p$

• מרחבי ℓ_p של סדרות אינסופיות

$$\ell_p = \{ x=(x_1,\dots) : \|x\|_p < \infty \} \qquad 1 \le p < \infty$$

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}$$

$$\ell_p = \{ x=(x_1,\dots) : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \}$$

נראה שזה מרחב לינארי:

$$\forall d \quad \left(\sum_{k=1}^{d} |x_k+y_k| \right)^{1/p} \le \left(\sum_1^d \dots \right)^{1/p} + \left(\sum_1^d \dots \right)^{1/p}$$

בעזרת אי"ש מינקובסקי על סדרות סופיות ולא השאפה ל-∞

$d \to \infty \qquad \|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p \quad \Rightarrow$ זהו מרחב לינארי

עבור $p<1$ נקבל קבוצות לא קמורות ~~ואי שוויון המשולש~~ לא יתקיים

• $\ell_1 \subset \ell_p \subset \ell_2 \subset \ell_q \subset \ell_\infty$

$(1<p<2) \qquad (2<q<\infty)$

$$\ell_\infty = \{ x=(x_1,x_2,\dots) : \sup_n |x_n| < \infty \}$$
$$\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|$$

• I קטע $1<p<\infty$

$$C_p(I) = \{ f : \text{פונקציות רציפות ב-} I \}$$

$$\|f\|_p = \left(\int_I |f(t)|^p \right)^{1/p}$$

$$\left(\int_I |f+g|^p \right)^{1/p} \le \left(\int_I |f|^p dt \right)^{1/p} + \left(\int_I |g|^p dt \right)^{1/p}$$

אי שוויון מינקובסקי לאינטגרל

תרגיל: הוכח את אי שוויון הנ"ל (להשתמש בסכומי רימן)

$$L_p(I) = \{ f : \int |f|^p < \infty \}$$
במובן של רימן

על-מנת ~~שתהיה~~ שיהיה מרחב נורמי

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

4 8.4.13
למניים!!

אנליזה מודרנית 2 ①

* מרחבים איזומטריים

X, Y שני מרחבים לינאריים נורמיים

$A: X \to Y$

(i) A חח"ע ועל

(ii) A לינארי

$A(x_1+x_2) = A(x_1)+A(x_2)$ [חיבור במרחבים שונים]

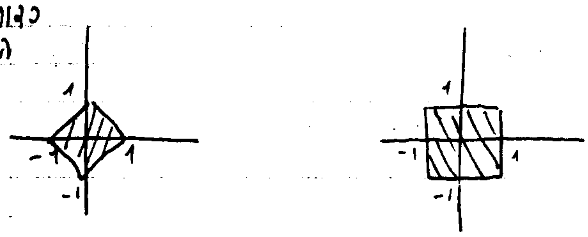
$A(\lambda x) = \lambda \cdot Ax$

(iii) A שומר על נורמה כלומר $\|Ax\| = \|x\|$

נורמה במרחב X — נורמה במרחב Y

$l_1^{(2)}$, $l_\infty^{(2)}$

כדור היחידה



A כנ"ל נקראת "**איזומטריה**"

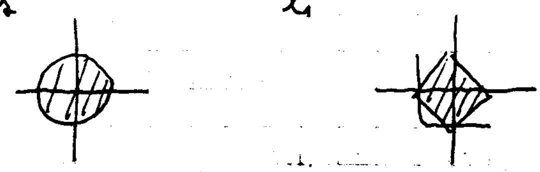
אם קיימת איזומטריה A בין X ל-Y אומרים כי X, Y **איזומטריים**

סימון: $X \simeq Y$

• דוגמא: $l_1^{(2)} \simeq l_\infty^{(2)}$ כי זה שתי פעולות סיבוב + מתיחה (פעולות לינאריות)

• דוגמא:

$l_1^{(2)}$ $l_2^{(2)}$



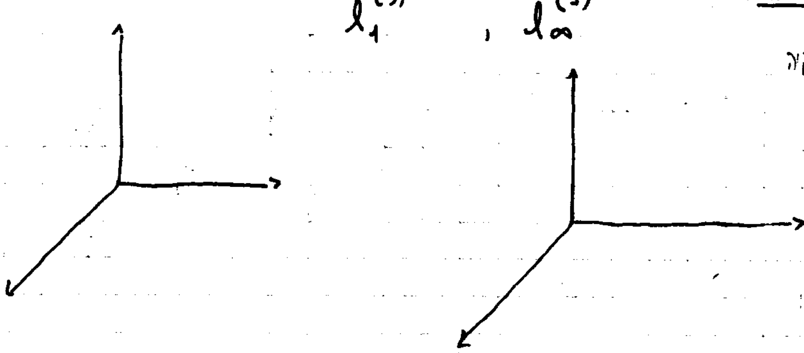
לא איזומטריים

• דוגמא: (תרגיל) $X \simeq l_2^{(2)}$ לאילו מרחבים X זה מתקיים? [אליפסה]

תמונה לינארית של כדור זה אליפסה

• תרגיל: $l_1^{(3)}$, $l_\infty^{(3)}$

קוביה



לא איזומטריים

• תרגיל: $C[0,1] \simeq C[a,b]$

• תרגיל: להראות כי $C[0,1] \not\simeq l_2$

שוויון המקבילית במרחב l_2 $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \frac{1}{2}(\|x\|^2+\|y\|^2)$ $\forall x,y$

8.4.13
למניינם!!

בס"ד

אנליזה מודרנית 2

* ספרביליות ושלמות

X מרחב לינארי ונורמי.

• **הגדרה:** נאמר ש $E\subset X$ "צפופה" אם

$$\forall x\in X \quad \forall \varepsilon>0 \quad \exists y\in E \quad : \quad \|x-y\|<\varepsilon$$

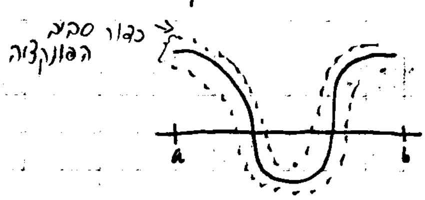
כלומר כל כדור מכיל איבר של E

• **דוגמאות:** (1) $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ קב' צפופה

(2) $P \subset C(I)$ (כל הפולינומים)

פונקציות רציפות בקטע סגור I

משפט ויירשטראס - כל פונקציה רציפה בקטע סגור ניתנת לקירוב במ"ש ע"י פולינום.



הגדרה: X נקרא מרחב "ספרבילי" אם קיימת קב' $E\subset X$ צפופה ובת מניה.

• $\mathbb{R}$ ספרבילי

• $C(I)$ ספרבילי כי ניקח את $E=\{$כל הפולינומים עם מקדמים רציונליים$\}$

• **תרגיל:** להראות ℓ_p - ספרבילי אם $1\le p<\infty$

$$E=\{(r_1,r_2,\dots,r_n,0,0,\dots)\}$$
איברים רציונליים

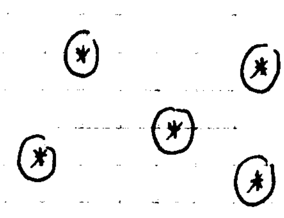
טענה: ℓ_∞ לא ספרבילי

$$\ell_p=\{x=(x_1,x_2,\dots)\} \qquad \|x\|=\sup_k|x_k|$$

$$\{x=(\pm1,\pm1,\pm1,\dots)\}\subset\ell_p$$

$$\|x^{(1)}-x^{(2)}\|=2$$

נתבונן בנקודות במרחב ונקח אותם עם כדור ברדיוס חצי



הכדורים לא חותכים אחד את השני · וזו קבוצה לא בת מניה ובנוסף לא קיימת קבוצה שיש לה איבר בכל כדור שתהיה בת מניה ולכן לא קיימת קבוצה צפופה בת מניה המוכלת בה.

8.4.13
שמיניים

אנליזה מודרנית 2 (3)

שלמות

$\{x_n\} \subset X$ סדרה. הסדרה נקראת סדרת קושי אם $\|x_n - x_m\| \to 0$ $(n,m \to \infty)$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \quad \forall n,m > N(\varepsilon) \quad : \quad \|x_n - x_m\| < \varepsilon$

- הערה: אם $x_n \to x$ אז $\|x_n - x_m\| \le \|x_n - x\| + \|x_m - x\| \to 0$
  אם הסדרה מתכנסת אזי סדרת קושי
- אם אנחנו ב $\mathbb{R}$ אזי גם הכיוון ההפוך מתקיים
- קריטריון קושי להתכנסות במ"ש במרחב $C(I)$ כל סדרת קושי היא מתכנסת
- הגדרה: X הוא מרחב שלם אם לכל סדרת קושי $\{x_n\}$ קיים גבול
  כלומר $x_n \to x \in X$
  דוגמאות: $\mathbb{R}, \mathbb{R}^d, C(I)$
- טענה: לכל $1 \le p < \infty$ ℓ_p הוא מרחב שלם

הוכחה

סדרת קושי
$$\begin{cases} x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots) \\ x^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots) \\ \vdots \end{cases}$$

יודעים ש $\|x^{(n)} - x^{(m)}\|_p \to 0$ $\quad \sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(n)} - x_j^{(m)}|^p \xrightarrow[(n,m)\to\infty]{} \infty$

כל סדרה מתכנסת ⇐ כדי קיבלנו סדרת קושי של מספרים ⇐ $\forall j \quad x_j^{(n)} - x_j^{(m)} \to 0$
$\forall j \; x_j^{(n)} \to x_j$ הוכחנו התכנסות רכיב רכיב

מועמד לגבול $\Rightarrow \quad x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$

צ"ל: (i) $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(n)} - x_j|^p \to 0 \quad (n\to\infty)$ התכנסות בנורמת ℓ_p

(ii) $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty$ הגבול הוא איבר במרחב

נקבע $\varepsilon > 0$, קיים $N(\varepsilon)$ כך ש $\forall n,m > N(\varepsilon)$ מתקיים $\sum_{j=1}^{d} |x_j^{(n)} - x_j^{(m)}|^p < \varepsilon^p$ $\quad \xrightarrow[m\to\infty]{}$ ∞

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{d} |x_j^{(n)} - x_j|^p < \varepsilon^p \quad \xRightarrow{d\to\infty} \quad \sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(n)} - x_j|^p < \varepsilon^p \quad \forall n > N(\varepsilon)$

הוכחנו ש $x^{(n)} \to x$ בנורמת ℓ_p

8.4.13

אנליזה (4) מודרנית ב

הערה: אם $\{x_n\}\subset X$ סדרת קושי אז $\exists \lim_{n\to\infty}\|x_n\|$

מתוך להוכחה כללית (הנורמות תמיד מתכנסות)

תרגיל - להראות ולהשתמש באי השוויון $\big|\,\|x_n\|-\|x_m\|\,\big| \le \|x_n-x_m\|$

חזרה להוכחה: לפי הערה קיים M כך ש $\forall n: \sum_{j=1}^{d} |x_j^{(n)}|^p \le M^p$

$$n\to\infty \Rightarrow \sum_{j=1}^{d} |x_j|^p \le M^p \xrightarrow[d\to\infty]{} \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \le M^p$$

כלומר $x\in l_p$

- **תרגיל:** להראות כי גם המרחב l_∞ הוא שלם.
- **דוגמא:** למרחב לא שלם

פונקציות רציפות בקטע סגור I, $1\le p<\infty$, $C_p(I)$

$$\|f\|_p = \left(\int_I |f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

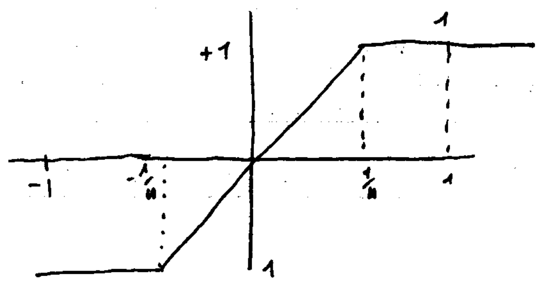
- נניח $p=1$, $I=[-1,1]$

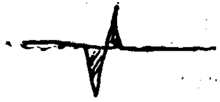
נמצא סדרה של פונקציות כך ש

(i) $\int_{-1}^{1} |f_n(t)-f_m(t)|\,dt \xrightarrow[(n,m)\to\infty]{} 0$

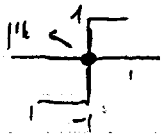
(ii) $\nexists \lim_{n\to\infty} f_n \in C_1(I)$

נתבונן בסדרת הפונקציות מהצורה:



$f_n - f_m =$  $\xrightarrow[(n,m)\to\infty]{} 0$

- נגדיר את הפונקציה



$$\int_{-1}^{1} |f_n - f| \to 0$$

תרגיל: להסביר מדוע נובע כי אין גבול במרחב C_1

* השלמה של מרחב

הגדרה: יהי X מרחב לינארי נורמי. נאמר כי מרחב $\tilde{X}$ הוא השלמה של X אם מתקיימים התנאים הבאים:

(i) קיימת העתקה לינארית $A: \tilde{X} \leftarrow X$ כך ש $\|Ax\|_{\tilde{X}} = \|x\|$ $\forall x \in X$

(ii) $\tilde{X}$ מרחב שלם

(iii) התמונה של A כלומר $\{Ax : x \in X\}$ צפופה ב $\tilde{X}$.

הערה: תכונה מספר 1 גוררת ש A חח"ע

משפט: לכל ~~מרחב~~ מרחב X לינארי ונורמי (לא ~~מרחב~~ שלם) יש השלמה והיא יחידה עד כדי איזומטריה.

הוכחה (סקיצה)

נסתכל על כל סדרות קושי $\{x_n\}$ ב X. נגדיר יחס שקילות.

נאמר כי $\{y_n\} \sim \{x_n\}$ אם $\|x_n - y_n\| \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0$ ניתן לבדוק שזהו יחס שקילות

$\tilde{X}$ = אוסף של כל מחלקות השקילות, מחלקת שקילות $[\{x_n\}]$ $\tilde{x}$

• נגדיר מבנה לינארי ב $\tilde{X}$:

$$[\{x_n\}] + [\{y_n\}] = [\{x_n + y_n\}]$$

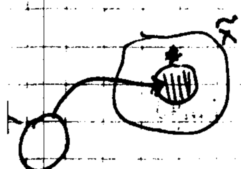
צריך לראות שזה גם סדרת קושי
לבדוק שאין תלות בנציגים

$$\lambda[\{x_n\}] = [\{\lambda x_n\}]$$

ניתן לבדוק כי אין תלות בנציגים כלומר מוגדר היטב.

• נגדיר ב $\tilde{X}$ נורמה $\|[\{x_n\}]\|_{\tilde{X}} = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_X$

ניתן לבדוק שאין תלות בנציג ושזו אכן נורמה.



• נשכן את X בתוך $\tilde{X}$ $A: X \to \tilde{X}$

$$x \in X \mapsto [(x,x,x,\dots)]$$

נבדוק כי A איזומטריה

$$\|Ax\|_{\tilde{X}} = \lim_{n\to\infty} \|x\| = \|x\|_X$$

ניתן לבדוק גם כי A לינארית

• נוכיח כי השיכון צפוף: יהי $\tilde{x} \in \tilde{X}$ ויהי $\varepsilon > 0$ צ"ל $x \in X$ כך ש

$\|Ax - \tilde{x}\|_{\tilde{X}} < \varepsilon$

30.4.13
לתנמיו!!

אנליזה מודרנית 2 ⑥

נבחר נציג מ $\tilde X$: $\tilde X = [\{x_n\}]$

$$\| Ax_n - \tilde X\|_{\tilde X} \to 0 \qquad (n\to\infty)$$

x_n הוא האיבר ה-n-י בסדרה $(x_1,x_2,x_3,\dots)$

$$\| [(x_n,x_n,x_n,\dots)] - [(x_1,x_2,\dots)]\|_{\tilde X}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \| x_n - x_m \|_X < \underset{n>N(\varepsilon)}{\varepsilon}$$

• נראה כי $\tilde X$ מרחב שלם. ניקח סדרת קושי ב $\tilde X$ כלומר:
$\tilde x_1, \tilde x_2, \dots$

$$\|\tilde x_n - \tilde x_m\|_{\tilde X} \to 0 \qquad (n,m\to\infty)$$

הוכחנו שהשיכון הוא צפוף. נקח לכל $\tilde x_n$ ע"י איבר Ax_n
כך ש $x_n\in X$ $\|Ax_n - \tilde x_n\| < \frac1n$ אז $\{x_n\}$ תהיה סדרת קושי ב-X.

$$\|x_n - x_m\| = \|Ax_n - Ax_m\| \le \|\tilde x_n - \tilde x_m\| + \frac1n + \frac1m \to 0$$

ולכן $[\{x_n\}] = \tilde x$ איבר במרחב $\tilde X$.

לבסוף נראה כי $\tilde x_k \to \tilde x$

$$\|\tilde x_k - \tilde x\| \le \overbrace{\|\tilde x_k - Ax_k\|}^{<\frac1k} + \underbrace{\|Ax_k - \tilde x\|}_{\text{כפי שהוכחנו}} \to 0$$

• יחידות של ההשלמה

נניח שקיימים 2 מרחבי השלמה

$$X \to A_1(X)\subset \tilde X_1, \qquad X \to A_2(X)\subset \tilde X_2$$

טענה: קיימת איזומטריה $U:\tilde X_1 \to \tilde X_2$ (חח"ע, על, שומרת נורמה, לינארית)

ברור שקיימת איזומטריה V מ $A_1(X)\to A_2(X)$ אבל אנו רוצים איזומטריה על המרחב הגדול

למה: נניח Y_1, Y_2 שני מרחבים לינאריים שלמים. נניח $Z_1\subset Y_1$ תת"מ לינארי צפוף
ו $Z_2\subset Y_2$ תת"מ לינארי צפוף ונניח יש איזומטריה $V:Z_1\to Z_2$

אזי ניתן להרחיב את V לאיזומטריה מ Y_1 ל Y_2

הוכחה

יהי $y_1\in Y_1$ כיוון ש Z_1 צפופה יש סדרה z_k ב Z_1 כך ש $z_k \to y_1$

נסתכל בסדרה $V(z_k)$ זוהי סדרת קושי כי V שומרת נורמה. כיוון ש Y_2 מרחב שלם

הסדרה מתכנסת $V(z_k)\to y_2$ נגדיר $V(y_1) := y_2$

תמונה של סדרת קושי היא סדרת קושי
V שומרת נורמה

22.4.13 למנוחן

שיעור השלמה
ביום ו' ב 17.5
בשעות 10-12
במקום התרגול ב 6.5
שלא התקיים

אנליזה מודרנית-2 ①

דוגמאות

- נסתכל על $X=$ אוסף כל הפולינומים בקטע I. $\|p\| = \sup_{t\in I}|p(t)|$

תרגיל - (1) X לא שלם

(2) $\tilde{X} \simeq C(I)$

- נסתכל ב $C_p(I)$ $\quad 1\le p<\infty$ $\quad$ • $C_p(I)=\{f$ רציפות בקטע $I\}$ $\quad \sqrt[p]{\int_I |f(x)|^p\,dx}$

$\tilde{C}_p = L_p(I)$

מרחב הפונקציות שהנורמות שלהם ~~בחזקת p~~ חסומות

קומפקטיות

לכל סדרה חסומה יש תת סדרה מתכנסת

$\mathbb{R}^d$: $\{x_n\}$ סדרה חסומה $\|x_n\|\le M$ $\Leftarrow$ $\exists x_{n_j}\to x$

באופן כללי זה לא נכון

<u>דוגמא:</u> $x=(x_1,x_2,\dots)$, $\ell_2=\{x\}$ $\quad \|x\|^2=\sum|x_k|^2<\infty$

$e_k=(0,0,\dots,\underset{k\text{ מקום}}{1},0\dots)$ $\quad \|e_k\|=1$ $\quad \|e_k-e_j\|=\sqrt{2}$

אין ת"ס קושי.

<u>הגדרה:</u> X מרחב לינארי נורמי שלם. $E\subset X$ נקרא "פרה-קומפקטית" אם לכל סדרה $\{x_j\}\subset E$ יש ת"ס מתכנסת $x_{n_j}\to\xi\in X$

<u>הערה:</u> E פרה קומפקטית $\Leftarrow$ E חסומה

אם E לא חסומה יש סדרה $x_n\in E$ כך ש $\|x_n\|\to\infty$

ב $\mathbb{R}^d$ גם הצד השני נכון

<u>תרגיל:</u> $\left.\begin{array}{l} B(0,1)\subset C(I) \\ B(0,1)\subset L_p(I)\end{array}\right\}$ קב' לא פרה-קומפקטית

<u>משפט:</u> קבוצה $E\subset X$ פרה-קומפקטית אמ"מ לכל $\varepsilon>0$ ניתן לכסות את E ע"י מס' סופי של כדורים שרדיוסם ε: $\forall\varepsilon>0,\ \exists z_1,\dots,z_N,\ E\subset\bigcup_{j=1}^{N} B(z_j,\varepsilon)$

(נקרא totally bounded, חסום כליל)

23.4.13
לג'ויינים!!

אנליזה מודרנית 2

הוכחה

$\Leftarrow$ נניח E פרה קומפקטית. נקח $\varepsilon>0$

$B(x_1,\varepsilon)$ $x_1\in E$ אם כיסינו הכל סיימנו. אחרת נמשיך

$B(x_2,\varepsilon)$ $\|x_2-x_1\|\ge\varepsilon$ $x_2\in E$ כך נמשיך עד הסוף

אם התהליך נעצר בשלב מסוים סיימנו. אחרת

נקבל סדרה $\{x_k\}\subset E$ $\|x_j-x_k\|\ge\varepsilon$ $(j\ne k)$

אין תת"ס קושי $\to$ סתירה (כי פרה קומפקטית אומר שלכל סדרה יש תת"ס קושי מתכנסת)

$\Rightarrow$ ניקח סדרה $\{x_k\}\subset E$.

ניקח $\varepsilon=1$ יש כיסוי של E ע"י מספר סופי של כדורים ברדיוס 1.

יש כדור B_1 כך ש $\{x_k\}\cap B_1 =: S_1$ אינסופית

נקח $\varepsilon=\frac{1}{2}$ נכסה ע"י כדורים ברדיוס $\frac{1}{2}$. יש כדור B_2

כך ש $S_1\cap B_2 =: S_2$ אינסופית וכך נמשיך..

נוכל לבנות תת סדרה $\{x_{n_j}\}$ כך ש $x_{n_j}\in B_j\subset\bigcap_{k=1}^{j} B_k$

$\Rightarrow$ $\|x_{n_j}-x_{n_k}\|\le\frac{2}{j}$ $(k>j)$ (פעמיים הרדיוס ב כדור ברדיוס $\frac{1}{j}$)

ולכן $\{x_{n_j}\}$ סדרת קושי, X שלם $\Leftarrow$ $\{x_{n_j}\}$ מתכנסת

- $\{z_1,\dots,z_n\}$ נקרא ε רשת ב E אם $\forall x\in E\ \min_{1\le j\le n}\|x-z_j\|<\varepsilon$

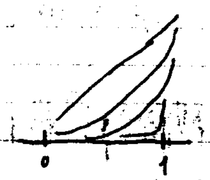
כלומר: E פרה קומפקטית אמ"מ לכל $\varepsilon>0$ קיימת ε רשת סופית.

- $C(I)$ $\|f-g\|=\sup_I|f(x)-g(x)|$

הגדרה: $E=\{f\}\subset C(I)$ נקראת משפחה רציפה במ"ש אם:

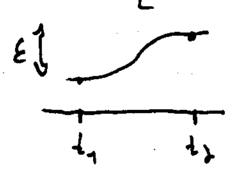
$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0\ \forall f\in E\ |t_1-t_2|<\delta \Rightarrow |f(t_1)-f(t_2)|<\varepsilon$

דוגמא: • $\{t^n\}$



לא משפחה רציפה במ"ש

- $E=\{f: |f'(x)|\le 10\}$



$\delta=\frac{\varepsilon}{10}$

עפ"י לגרנז' ההפרש לא יגדל יותר מהנגזרת X ההפרש $|t_1-t_2|\cdot f'$

22.4.13

אנליזה מודרנית 2 (3)

משפט ארצלה Arzela:

$E\subset C(I)$ פרה-קומפקטית אמ"מ (i) E חסומה — הנעמה חסומה אבל הנורמה לא ה קווע

(ii) E משפחה רציפה במ"ש

הוכחה

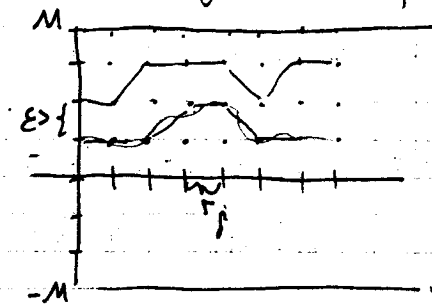
$\Leftarrow$ נתון (i) ו-(ii) ! מחסימות $\exists M\ \forall f\in E\ \ |f(x)|\le M\ \ \forall x\in I$

נקבע $\varepsilon>0$ ונבנה ε רשת סופית. ניקח $\delta(\varepsilon)$ מהגדרת במ"ש.

נקבל אוסף סופי של פונקציות $\Psi=\{f_j\}\subset C(I)$

Ψ הוא ε רשת ל-E

הפונקציה לא יכולה להשתנות בין נקודה לנקודה הבאה ביותר מ-ε בגלל רציפות במ"ש



מס' סופי של נקודות כל האפשרויות ⇓ מס' סופי של משולבים של פונקציות

לכל $f\in E$ יש $f_j\in\Psi$ כך ש $\|f-f_j\|\le 2\varepsilon$

$\Rightarrow$ תרגיל

תרגילים

לבדוק פרה קומפקטיות

1) $I=[0,1]$ $\quad E=\{f: f(0)=0, |f'(t)|\le 10\}$

2) $E=\{f: f(0)=0, \underbrace{\int_I |f'(t)|^2dt\le 100}_{\|f'\|_2\le 10}\}$ $\quad I=[0,1]$ — מתקיים תנאי? כי הנורמות קטנות

3) $E=\{f: |f(0)|\le 100, \|f'\|_p\le 10\}$ $(p>1)$

4) עבור $p=1$, לא פרה קומפקטי

הגדרה: X מרחב שלם. $K\subset X$ נקראת קומפקטית אמ"מ 1) K קב' פרה קומפקטית 2) K קב' סגורה

תנאי שקול: לכל סדרה ב-K יש תת סדרה מתכנסת שגבולה גם ב-K

דוגמאות

1) $C(I)$, $E=\{f: f(0)=0, |f'(t)|\le M\}$ — רציפות לא נראת

זו קבוצה פרה-קומפקטית אבל לא סגורה $\Leftarrow$ לא קומפקטית

$K=\{f: f(0)=0, |f(t)-f(s)|\le M|t-s|\}$ תנאי ליפשיץ

$E\subset K$, K קבוצה סגורה ופרה קומפקטית ולכן קומפקטית

22.4.13

אנליזה מודרנית (4)

(*) K קבוצה סגורה $f_n \to f \in K$: $f \in K$

K חסומה $|f(t)| \le |f(0)| + |f(t) - f(0)| \le 0 + M \cdot |I|$

בכל היותר אורך הקטע

$\|f\|_{C(I)} \le M |I| \quad \forall f \in K$

K משפחה רציפה במ"ש : עבור $\varepsilon > 0$ ניקח $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$

לפי ארצלה K סגורה קומפקטית $\Leftarrow$ K קומפקטית

תרגיל: הוכיחו כי $K = \overline{E}$

תזכורת: באופן כללי: $\overline{E} = \{x \in X : \exists y_j \in E : y_j \to x\}$

(*) $|f(t) - f(s)| \le |f(t) - f_j(t)| + |f_j(t) - f_j(s)| + |f_j(s) - f(s)|$

$\le \|f - f_j\| + M|t-s| + \|f - f_j\| \longrightarrow M|t-s|$

__תרגיל:__ ① במרחב ℓ_2 $K = \{x \in \ell_2 : |x_k| \le \frac{1}{k} \ \forall k\}$

להראות K קומפקטי.

② להראות כי $K = \{x \in \ell_2 : |x_k| \le \frac{1}{\sqrt{k}}\}$ כבר לא קומפקטי.

__משפט:__ אם K קומפקטית ואם f פונקציה רציפה $\mathbb{R} \to K$: $f: K \to \mathbb{R}$

אז f חסומה ומשיגה מינימום ומקסימום ב K.

רציפות אם $x_n \to x$ אז $f(x_n) \to f(x)$

__הוכחה__

נסמן $M = \sup_{x \in K} f(x)$ ויש סדרה $x_n \in K$, $f(x_n) \to M$

מקומפקטיות יש ת"ס $\{x_{n_j}\}$ $x_{n_j} \to x \in K$.

מרציפות $f(x) = \lim_{j \to \infty} f(x_{n_j}) = M$

לכן f חסומה ~~מלמעלה~~ מלמעלה ומשיגה את את המקסימום בנקודה x.

באופן דומה מוכיחים עבור המינימום.

מרחבי הילברט (Hilbert)

X מרחב לינארי. $f,g \in X \to \langle f,g \rangle$

מכפלה פנימית

הרמיטיות (i) $\langle f,g \rangle = \overline{\langle g,f \rangle}$

לינאריות (ii) $\langle \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 , g \rangle = \lambda_1 \langle f_1,g \rangle + \lambda_2 \langle f_2,g \rangle$

(iii) $\underbrace{\langle f,f \rangle}_{\in \mathbb{R}} \geq 0 \quad , \quad \langle f,f \rangle = 0 \Leftrightarrow f=0$

- אי שוויון קושי שוורץ:

$$|\langle f,g \rangle|^2 \leq \langle f,f \rangle \cdot \langle g,g \rangle$$ או $|\langle f,g \rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|$

- $\|f\| := \sqrt{\langle f,f \rangle}$ אי שוויון המשולש נובע מקושי שוורץ והומוגניות מתכונה 3

תרגיל: להוכיח רציפות של המכפלה הפנימית:

נניח $\left.\begin{array}{l} f_n \to f \;(\|f_n - f\| \to 0) \\ g_n \to g \;(\|g_n - g\| \to 0) \end{array}\right\} \Rightarrow \langle f_n, g_n \rangle \to \langle f,g \rangle$

11   29.4.13   ①

אנליזה נומרית 2 - הרצאה 4:

מרחבי הילברט

תזכורת: מכפלה פנימית - $\langle f,g\rangle \leftarrow f,g$ המקיימת:

(i) $\langle f,g\rangle = \overline{\langle g,f\rangle}$

(ii) $\langle \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 , g\rangle = \lambda_1\langle f_1,g\rangle + \lambda_2\langle f_2,g\rangle$

(iii) $\langle f,f\rangle \geq 0$, $\langle f,f\rangle = 0 \Leftrightarrow f=0$

זה מאפשר להגדיר נורמה: $\|f\| := \sqrt{\langle f,f\rangle}$

אי-שוויון קושי-שוורץ: $|\langle f,g\rangle| \leq \|f\|\cdot\|g\|$

תרגיל: להוכיח רציפות מ"פ: $\left\{\begin{array}{l} f_n \to f \\ g_n \to g \end{array}\right. \Rightarrow \langle f_n,g_n\rangle \to \langle f,g\rangle$.

דוגמא: ב-$\mathbb{R}^d$ או $\mathbb{C}^d$:

$x=(x_1,x_2,\dots,x_d)$

$y=(y_1,y_2,\dots,y_d)$

$$\langle x,y\rangle = \sum_{j=1}^{d} x_j \overline{y_j}$$

דוגמא: ב-ℓ_2:

$x=(x_1,x_2,\dots)$, $\sum |x_j|^2 < \infty$

$y=(y_1,y_2,\dots)$, $\sum |y_j|^2 < \infty$

$$\langle x,y\rangle := \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j}$$

הטור מתכנס (אפילו בהחלט) לפי אי-שוויון קושי-שוורץ לטורים:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j \overline{y_j}| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^2}\cdot\sqrt{\sum_{j=1}^{\infty}|y_j|^2} < \infty$$

$$\Rightarrow \|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle} = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^2}$$

דוגמא: ב- $C_2(I) \subset \underbrace{L^2(I)}_{\text{מרחב ההשלמה}}$

I

$\langle f,g\rangle = ?$

נבחר סד"ת $\varphi_n \to f$, $\psi_n \to g$ (במרחב $C_2(I)$), ונגדיר:

$$\langle f,g\rangle := \lim_{n\to\infty} \int_I \varphi_n(x)\overline{\psi_n(x)}\,dx$$

תרגיל: הוכיחו שהגבול קיים! (רמז: הראו שזו סדרת קושי (ב-$\mathbb{C}$)).

<u>הערה:</u> מרחב לינארי נורמי נקרא <u>אוקלידי</u> אם ניתן להגדיר בו מ"פ שמשרה את הנורמה.

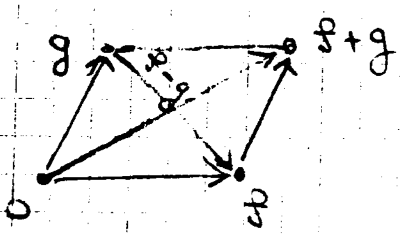
- המרחבים C_p , L_p , l_p $(p\neq 2)$ <u>לא</u> מרחבים אוקלידיים:

<u>טענה:</u> שוויון <u>המקבילית:</u> הנורמה אוקלידית מתקיים:

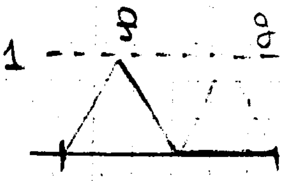
$$\forall f,g: \ \|f+g\|^2+\|f-g\|^2=2(\|f\|^2+\|g\|^2)$$

<u>הוכחה:</u> $\langle f+g, f+g\rangle + \langle f-g, f-g\rangle =$

$$= \langle f,f\rangle + \langle f,g\rangle + \langle g,f\rangle + \langle g,g\rangle + \langle f,f\rangle - \langle f,g\rangle - \langle g,f\rangle + \langle g,g\rangle = 2\langle f,f\rangle + 2\langle g,g\rangle$$



<u>למשל:</u> $C(I)$:



$$\|f\|=\|g\|=1$$
$$\|f+g\|=\|f-g\|=1$$

<u>לא</u> מתקיים שוויון המקבילית...

<u>תרגיל:</u> אם $p\neq 2$ אזי $\|\cdot\|_p$ לא אוקלידית (ב- l_p , L_p , C_p)

<u>טענה:</u> אם במרחב לינארי $X,\|\cdot\|$ מתקיים שוויון המקבילית $\Leftarrow$ הנורמה אוקלידית: $\exists\langle\cdot,\cdot\rangle: \|f\|=\sqrt{\langle f,f\rangle}$

(כלומר קיום שוויון המקבילית הכרחי <u>ומספיק</u> לאוקלידיות)

<u>הכוון:</u> למען הנוחות נניח שעובדים מעל $\mathbb{R}$.

$$\|f+g\|^2=\langle f+g,f+g\rangle=\langle f,f\rangle+\langle g,g\rangle+2\langle f,g\rangle$$

$$\Rightarrow \langle f,g\rangle := \frac{1}{2}\left[\|f+g\|^2-\|f\|^2-\|g\|^2\right]$$

<u>תרגיל רשות:</u> לוודא שכך באמת מגדיר מ"פ...

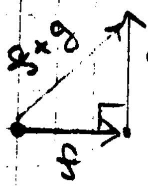
17

29.4.13

③

מרחבים אוקלידיים מאפשרים לנו לדבר על אורתוגונליות:

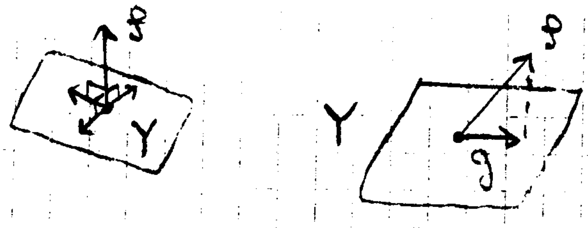
<u>אורתוגונליות</u>: $f \perp g$ אם $\langle f,g\rangle = 0$.



<u>משפט פיתגורס</u>: $\|f+g\|^2=\|f\|^2+\|g\|^2 \Leftarrow f\perp g$

(*) $f\in X$, $Y\subset X$ ת"מ לינארי סגור.

נאמר כי: $f\perp Y$ (או: $f\in Y^{\perp}$) אם לכל $g\in Y$: $\langle f,g\rangle=0$.



באלגברה לינארית הוכחנו

שאם X ממימד סופי, יש

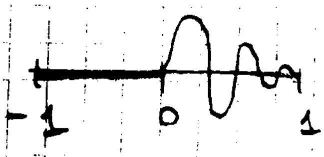
פירוק: $f=g+h$

כאשר: $g\in Y$, $h\perp Y$ ($h\in Y^{\perp}$).

נראה בהמשך שזה נכון גם במרחב ממימד אינסופי שהוא <u>שלם</u>

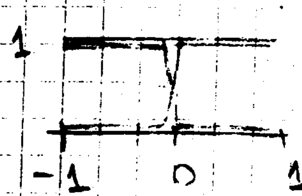
<u>תרגיל</u>: במרחב $C_2[-1,1]$ (<u>לא שלם</u>), נגדיר:

$$Y=\{g\in X: g(t)=0 \quad \forall t\in[-1,0]\}$$



א) הראו כי Y ת"מ <u>סגור</u>.

ב) הראו כי אם $f(t)\equiv 1$ אזי <u>לא</u> ניתן לפרק $f=g+h$, $h\in Y^{\perp}$, $g\in Y$.



האפשרות למצוא פירוק כנ"ל חשובה, מכאן חשיבותם של מרחבים אוקלידיים שלמים.

<u>הגדרה</u>: <u>מרחב הילברט</u> (Hilbert) זה מרחב <u>שלם</u> עם נורמה <u>אוקלידית</u>.

<u>דוגמאות</u>: $\mathbb{C}^d$, $\mathbb{R}^d$, l_2.

$C_2(I)$ - <u>לא</u> מרחב הילברט (<u>לא שלם</u>), ההשלמה: $L_2(I)$ - הילברט

<u>משפט:</u> יהיו H מרחב הילברט, $Y\subset H$ ת"מ סגור.

אזי לכל $f\in H$: $\exists\, g\in Y,\ h\in Y^{\perp} :\ f = g+h$

והפירוק הנ"ל הוא <u>יחיד</u>.

<u>הוכחה:</u> <u>יחידות</u>: $f = g_1+h_1 = g_2+h_2$, נגדיר:

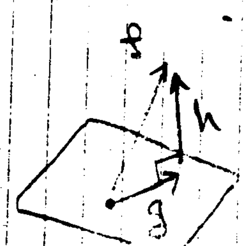
$$x := \underbrace{g_1-g_2}_{\in Y} = \underbrace{h_2-h_1}_{\in Y^{\perp}} \implies \langle x,x\rangle = 0 \implies x=0$$

$$(x\in Y\cap Y^{\perp})$$

קיום - נראה בקרוב...

<u>בעיית הקירוב הטוב ביותר</u>

יהי $X,\|\cdot\|$ מרחב אוקלידי, $Y\subset X$ ת"מ, סגור, $f\in X$.



<u>מטרה:</u> למצוא $g\in Y$ כך ש:

$$\|f-g\| = \inf_{l\in Y}\|f-l\| =: d(f,Y)$$

(ואז זה min).

<u>הגדרה:</u> נאמר כי $g\in Y$ <u>קירוב טוב</u> ביותר (של f ב-Y).

אם: $\|f-g\| = d(f,Y)$

<u>משפט:</u> יהיו X מרחב אוקלידי (לא בהכרח שלם)*, $Y\subset X$ ת"מ סגור, $f\in X$.

(i) <u>אם</u> יש פירוק: $f=g+h$, $\underbrace{g\in Y}_{\text{היטל}}, h\in Y^{\perp}$ אז g קירוב טוב ביותר.

(ii) <u>אם</u> יש קירוב טוב ביותר אזי הוא היטל.

* לכן עדין לא מובטח <u>קיום</u> קירוב...

<u>הוכחה:</u> (i) נניח יש פירוק. נניח $l\in Y$, $l\neq g$.

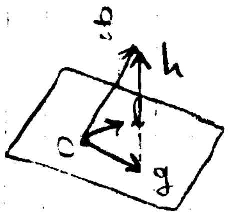
$$\|f-l\|^2 = \|\underbrace{(f-g)}_{=h\in Y^{\perp}} + \underbrace{(g-l)}_{\in Y}\|^2 = \|h\|^2 + \underbrace{\|g-l\|^2}_{\neq 0} > \|f-g\|$$

לכן g קירוב טוב ביותר (וגם <u>יחיד</u>)

12 29.4.13 ⑤

(ii) נניח g קירוב טוב ביותר. צ"ל: h ניצב.

אם לא, $h = f - g \notin Y^{\perp}$, לכן קיים $l \in Y$ כך ש: $\langle h, l\rangle \neq 0$.



ואפשר לבחור ε קטן מספיק ו-$\alpha \in [0,2\pi)$ כך ש:

$$\|f - (g + \varepsilon \cdot e^{i\alpha} \cdot l)\|^2 = \|\underbrace{f - g}_{=h} - \varepsilon e^{i\alpha} l\|^2 =$$

$$= \|h\|^2 + \varepsilon^2 \|l\|^2 - 2\varepsilon \mathrm{Re}\underbrace{\langle h, l\rangle}_{\neq 0} < \|f - g\|^2$$

קטן ממש! סתירה לכך ש-g קירוב טוב ביותר...

משפט: H - מרחב הילברט, $Y \subset H$ ת"מ סגור. אז לכל $f \in H$ קיים קירוב טוב ביותר $g \in Y$.

הוכחה: קיימת סדרה $g_n \in Y$, $\|f - g_n\| \to \rho = d(f, Y)$

אם נוכיח ש-g_n מתכנסת, סיימנו. H אוקלידי $\Leftarrow$ משוואת המקבילית:

$$2(\underbrace{\|f - g_n\|^2}_{\to \rho^2} + \underbrace{\|f - g_m\|^2}_{\to \rho^2}) = \|2f - g_n - g_m\|^2 + \|g_m - g_n\|^2 =$$

$$= \underbrace{4 \cdot \|f - \underbrace{\tfrac{g_m + g_n}{2}}_{\in Y}\|^2}_{\geq \rho^2} + \|g_n - g_m\|^2$$

מסקנה: $\|g_m - g_n\| \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$.

כלומר g_n סדרת קושי, **ומהשלמות** $g_n \to g$, ו-$g \in Y$ כי Y סגור.

$$\Rightarrow \|f - g_n\| \to \|f - g\| = \rho$$

$$//$$

(*) יהי $X, \|\cdot\|$ מרחב נורמי (לא בהכרח אוקלידי), $Y \subset X$ ת"מ ממימד d.

$l_1, l_2, \ldots, l_d \in Y$ בסיס: $\forall y \in Y: \quad y = \sum_{k=1}^{d} c_k l_k$

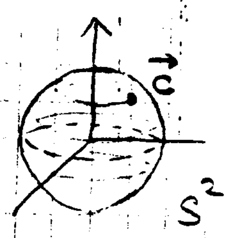
$$\vec{c} = (c_1, \ldots, c_d) \in (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$$

נתבונן בהעתקה: $\mathbb{R}^d \to Y$: $\vec{c} \mapsto y=\sum_{k=1}^{d} c_k l_k$

היא לא בהכרח איזומטריה! (לא הכרח שומרת-נורמה)

<u>טענה</u>: קיימים m, M כך ש: $0<m\le \frac{\|y\|_Y}{\|\vec{c}\|_{\mathbb{R}^d}} \le M$

(כלומר הנורמות שקולות).



<u>הוכחה</u>: מספיק להוכיח עבור $\|\vec{c}\|_{\mathbb{R}^d}=1$.

נגדיר: $\varphi(\vec{c}):=\|y\|_Y$.

φ <u>רציפה</u>: מאי-שוויון המשולש ההפוך: $\big|\|x\|-\|y\|\big|\le\|x-y\|$:

$$\left|\varphi(\vec{c}+\Delta\vec{c})-\varphi(\vec{c})\right|=\left|\left\|\sum_{k=1}^{d}(c_k+\Delta c_k)l_k\right\|-\left\|\sum_{k=1}^{d}c_k l_k\right\|\right|\le$$

$$\le\left\|\sum_{k=1}^{d}\Delta c_k l_k\right\|\le\sum_{k=1}^{d}|\Delta c_k|\cdot\|l_k\|\le\sqrt{\sum_{k=1}^{d}|\Delta c_k|^2}\cdot\underbrace{\sqrt{\sum_{k=1}^{d}\|l_k\|^2}}_{=C}\to$$

קושי-שוורץ

קבוע!

ולכן זה $\to 0$ כאשר $\Delta\vec{c}\to 0$. הפונקציה φ רציפה על הקבוצה

הקומפקטית: $K=\{\vec{c}:\|\vec{c}\|_{\mathbb{R}^d}=1\}$ ולכן קיימים:

$M=\max\varphi|_K$; $m=\min\varphi|_K$

אילו $m=0$ אז נקבל: $y_0=0 \Leftarrow \exists\vec{c}_0\in K,\ \varphi(\vec{c}_0)=\|y_0\|=0$

ולכן גם $\underline{\vec{c}_0=\vec{0}}$, סתירה, כי $\vec{c}_0\in K$. לכן $m>0$. ■

<u>טענה</u>: כל מרחב $Y,\|\cdot\|$ עם מימד סופי הוא <u>שלם</u>.

(נובע מכך שהוא "שקול-נורמות" ל-$\mathbb{R}^d$ השלם)

[בנורמות שקולות, סדרה שמתכנסת בנורמה אחת, הסדרה המוקבילה לה תתכנס בנורמה השנייה].

תרגיל: (1) כל קב' חסומה ב-Y היא פרה-קומפקטית.

(2) כל קב' סגורה וחסומה ב-Y היא קומפקטית.

תרגיל: (הכללה של תרגיל וההרצאה 1): יהי P_N מרחב הפולינומים ממעלה $\le N$. $P_N \subset C(I), C_2(I)$.

נניח $P_N \ni p_k \to f$, צ"ל: $f \in P_N$. (כלומר P_N ת"מ **סגור**)

משפט: יהיו $X, \|\cdot\|$, $Y \subset X$ ת"מ סגור, $\dim Y = d < \infty$, $f \in X$. אזי **קיים** קירוב טוב ביותר ל-f $g \in Y$. ($\Leftarrow Y$ סגור)

הוכחה: ניקח סדרה $g_n \in Y$ עם: $\|f - g_n\| \longrightarrow \rho = d(f,Y)$.

g_n סדרה חסומה, שכן: $\|g_n\| \le \underbrace{\|f-g_n\|}_{\to \rho} + \underbrace{\|f\|}_{\text{קבוע}} \le C$

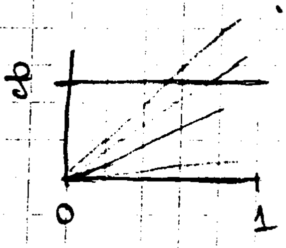
לכן g_n סדרה חסומה בת"מ

Y ממימד סופי $\Leftarrow$ יש תת-סדרה מתכנסת $g_{n_j} \to g$, $\|f - g\| = \rho$.

הערה: לא מובטח שהקירוב יחיד! (כשאין אוקלידיות). למשל -

$X = C[0,1]$, $Y = \{y(t) = \lambda t\}$, $f(t) \equiv 1$.

$\dim Y = 1$, $d(f,Y) = 1$.



בעיית צ'בישב:

$$X = C(I)$$

$$Y = P_N = \{p(t) = \sum_{j=0}^{N} a_j t^j\}, \quad f(t) = t^{N+1}.$$

$$\dim Y = N+1$$

משפט: (צ'בישב): הקירוב הטוב ביותר של f ע"י $p \in P_N$ הוא **יחיד**. (אפילו שאין אוקלידיות).

74

13.5.
למניאק!!

אנליזה ① מודרנית ב

* בסיסים אורתונורמליים

בסיס אך: $\mathbb{R}^d$ $\{e_1,\dots,e_d\}$

מקדמי פוריה $C_k = \langle f,e_k\rangle$, $f=\sum_{k=1}^{d} C(k)e_k$, $f\in\mathbb{R}^d$

$\{e_1,\dots\}$ אבל מרחב אינסופי (אוקלידי) $\|\cdot\|$, X , $\dim X=\infty$

<u>הגדרה:</u> $\{e_k\}$ מע' אורתונורמלית אם

$$\langle e_k,e_j\rangle=\begin{cases}1 & k=j\\ 0 & k\neq j\end{cases}$$

$$f=\sum_{k=1}^{\infty} c(k)e_k$$

<u>משפט:</u> אם קיים פירוק הנ"ל אזי: <u>א.</u> הפירוק יחיד <u>ב.</u> $C(k)=\langle f,e_k\rangle$

<u>הוכחה.</u>

- נניח שיש פירוק ונוכיח שהוא יחיד $\|f-S_N\|\xrightarrow[(n\to\infty)]{}0$ נגדיר $S_N=\sum_{k=1}^{N}c(k)e_k$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \langle f,e_k\rangle}}{\langle S_N,e_k\rangle} = \sum_{j=1}^{N}c(j)\langle e_j,e_k\rangle \overset{N>k}{=} c(k)$$

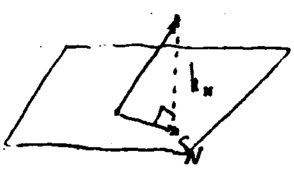
(כשמצמצמים קודם)

המקדמים נתונים ביחידות והם נתונים באופן $\langle f,e_k\rangle=C(k)$

$f\sim\sum_{k=1}^{\infty}\langle f,e_k\rangle e_k$ טור פוריה של f.

- $E_N=\operatorname{span}\{e_1,\dots,e_N\}$, $\dim E_N=N$

S_N - קירוב טוב ביותר של f ב E_N.



$$\|h_N\|=\|f-S_N\|\overset{(?)}{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}}0$$

$h_N:=f-S_N$

$f=S_N+h_N$

$S_N\perp h_N$

$h_N\perp E_N$

$1\le k\le N$

$\langle h_N,e_k\rangle=\langle f-S_N,e_k\rangle$

$=\langle f,e_k\rangle-\langle S_N,e_k\rangle$

$=\langle f,e_k\rangle-\langle f,e_k\rangle=0$

$$\|f\|^2=\|S_N+h_N\|^2=\|S_N\|^2+\|h_N\|^2$$

$$\Rightarrow \|S_N\|^2\le\|f\|^2$$

$$\sum_{k=1}^{N}|\langle f,e_k\rangle|^2\le\|f\|^2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\langle f,e_k\rangle|^2\le\|f\|^2$$

אי שוויון בסל
Bessel

תנאי שקול להוכיח. אי שוויון בסל יתן שוויון ואז קיים פירוק
כי השארית תשאף ל-0

13.5.13
למעינה

אנליזה מודרנית 2

H- מרחב הילברט ספרבילי $\dim H = \infty$

$\{e_n\}$ מע' א"נ. $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ מתכנס או מתבדר?

טענה: הטור מתכנס $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$

הוכחה

$S_N = \sum_{n=1}^{N} c_n e_n$

נראה שהטור כי קיים
כורל שלמות ואז נקבל
התכנסות הסדרה סדרת קושי

$(N<M)$ $\|S_M - S_N\|^2 = \|\sum_{n=N+1}^{M} c_n e_n\|^2 = \sum_{n=N+1}^{M} |c_n|^2 \longrightarrow 0$ $(N,M \to \infty)$

נכון $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$

* משפט על איזומורפיזם של מרחבי הילברט

יהיו H_1, H_2 שני מרחבי הילברט ספרביליים (ממימד ∞) אזי H_1, H_2 איזומורפיים

$\exists\, \underset{\text{יוניטרי}}{A}: H_1 \to H_2$ $\quad \langle Af, Ag \rangle_{H_2} = \langle f, g \rangle_{H_1}$ לכל f,g

הוכחה

נראה ש $H_1 \simeq \ell^2$

$A: f_1 \in H_1 \to \{c(n)\} \in \ell^2$ ניקח העתקה

(מאי שוויון בסל) (יכול ריקמים מתכנס)

$f = \sum_{1}^{\infty} c(k)\, e_n$

$\langle f, g \rangle = \langle \sum_{1}^{\infty} c_n e_n, \sum_{1}^{\infty} d_n e_n \rangle = \lim_{N\to\infty} \langle \sum_{1}^{N} c_n e_n, \sum_{1}^{N} d_n e_n \rangle$

$= \lim_{N\to\infty} \sum_{1}^{N} c_n \bar{d_n} = \sum_{1}^{\infty} c_n \bar{d_n} = \langle \vec{c}, \vec{d} \rangle_{\ell_2}$ — מנצ' מנוחה

* קריטריון לשלמות - המערכת $\{e_n\}_1^{\infty}$ שלמה $\Leftrightarrow$ $\left.\begin{matrix} f \perp e_n \\ (n=1,\dots) \end{matrix}\right\} \Rightarrow f=0$ $\forall f \in H$

$H, \|\cdot\|, \{e_n\}$ נורמלית — אז לא ניתן להוסיף עוד וקטור למערכת שאורתונורמלי לשאר האיברים חוץ מאפס

13.5.13
שמיניים!!

בס"ד

אנליזה הרמונית 2 5

$f = \underset{H_0}{g} + \underset{\perp H_0}{h}$ ⇐ $h \perp e_n \quad \forall n$

ו- $h \neq 0$ כי אחרת $H_0 \ni f = g$

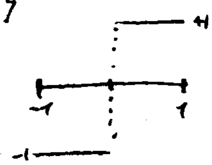
תרגיל: $C_2[-1,1]$ להראות שיש מערכת אורתונורמלית $\{e_n\}$ כך ש

(i) $\{e_n\}$ לא שלמה

(ii) אין $f \perp e_n$, $f \neq 0$

$E = \{f : \int_0^1 f(t)dt = \int_{-1}^0 f(t)dt\}$

$E^\perp = \{0\}$



משפט: H מרחב הילברט ספרבילי. כל מע' א"נ לא שלמה ניתן להשלים

הוכחה

תת-מרחב לינארי וסגור $E = \overline{\text{span}\{e_n\}}$

תמ"ל לינארי וסגור $E^\perp = \{h \in H : h \perp E\}$

תרגיל: להוכיח כי תמ"ל של מרחב ספרבילי גם ספרבילי

לכן $E^\perp$ גם ספרבילי. נבחר לו בסיס א"נ $\{f_1, f_2, f_3, \dots\}$

$\{e_n\} \cup \{f_k\}$

$f = \underset{E}{g} + \underset{E^\perp}{h}$, $g = \sum c_n e_n$, $h = \sum d_k f_k$

$\Rightarrow f = \sum c_n e_n + \sum d_k f_k$