בהינתן פרמטריזציה $f(t)$, ניתן לחשב אינטגרל

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t=\int_a^b [u(t)+iv(t)]\ \mathrm{d}t=\int_a^b u(t)\ \mathrm{d}t+i\int_a^b v(t)\ \mathrm{d}t$$

אם אין פרמטריזציה, אלא רק קטע γ, נרצה בכל זאת לחשב את האינטגרל, ולכן נמצא פרמטריזציה ונבצע:

$$\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z=\int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\ \mathrm{d}t$$

$$\int_\gamma f'(z)\ \mathrm{d}z=f(\gamma(b))-f(\gamma(a))$$

אם f אנליטית בתחום D כך ש-$\gamma\in D$.

משפט הערכה

$$\left|\int_\Gamma f(z)\ \mathrm{d}z\right|\le M\cdot L$$

כאשר:

Γ	קונטור(עקומה חלקה למקוטעין)
f	פונקציה רציפה על Γ
L	אורך של Γ
M	$M=\max_{z\in\gamma}\lvert f(z)\rvert$

תרגיל

חשב $I=\int_{\Gamma_R}(z-z_0)^n\ \mathrm{d}z$ כאשר לכל $n\in\mathbb{Z}$ $\Gamma_R=\{z\,|\,|z-z_0|=R\}$.

פתרון

$$\gamma(t)=z_0+Re^{it}$$

$$\gamma'(t)=iRe^{it}$$

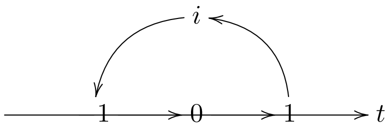
$$I=\int_0^{2\pi}\left(z_0+Re^{it}-z_0\right)^n\cdot iRe^{it}\,\mathrm{d}t=iR^{n+1}\int_0^{2\pi}e^{it(n+1)}\,\mathrm{d}t=$$

$$=\begin{cases}2\pi iR^0=2\pi i & n=-1\\ \frac{iR^{n+1}}{i\cdot(n+1)}e^{it(n+1)}\Big|_0^{2\pi}=0 & n\ne-1\end{cases}$$

תרגיל

$$\int_{\Gamma} |z| \cdot \overline{z} \, \mathrm{d}z$$

כאשר Γ הוא



פתרון

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_1$$

$$\gamma_1 (t) = e^{it}, 0 \leq t \leq \pi \qquad \gamma_2 (t) = t, -1 \leq t \leq 1$$

$$\gamma_1' (t) = ie^{it} \qquad \gamma_2' (t) = 1$$

$$\int_{\Gamma_1} |z| \cdot \overline{z} \, \mathrm{d}z = \int_0^{\pi} \left| e^{it} \right| \cdot e^{-it} \cdot ie^{it} \, \mathrm{d}t = \int_0^{\pi} i \, \mathrm{d}t = i\pi$$

$$\int_{\Gamma_2} |z| \cdot \overline{z} \, \mathrm{d}z = \int_{-1}^{1} |t| \, t \, \mathrm{d}t = 0$$

$$\int_{\Gamma} = \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} = i\pi$$

תרגיל

צ"ל $\int_{\Gamma_R} \frac{z^2 + 2z - 5}{(z^2 + 4)(z^2 + 2z + 2)}$ כאשר $\Gamma_R = \{z | |z| = R\}$

הוכחה

נשתמש במשפט הערכה:

$$\left| \int_{\Gamma_R} f (z) \, \mathrm{d}z \right| \leq M \cdot L = 2\pi R \cdot \max_{\Gamma_R} |f (z)|$$

$$|f(z)| = \frac{|z|^2\left|1+\frac{2}{z}-\frac{5}{z^2}\right|}{|z|^4\cdot\left|1+\frac{4}{z^2}\right|\cdot\left|1+\frac{2}{z}+\frac{2}{z^2}\right|}$$

נמצא חסמים(עבור R מספיק גדול)

$$\left|1+\frac{2}{z}-\frac{5}{z^2}\right| \le 1+\frac{2}{|z|}+\frac{5}{|z|^2} = 1+\frac{2}{R}+\frac{5}{R^2} \le 2$$

$$\left|1+\frac{4}{z^2}\right| \ge \left||1|-\left|\frac{4}{z^2}\right|\right| = \left|1-\frac{4}{z^2}\right| = \left|1-\frac{4}{R^2}\right| \ge \frac{1}{2}$$

$$\left|1+\frac{2}{z}+\frac{2}{z^2}\right| \ge \left|1-\left|\frac{2}{z}+\frac{2}{z^2}\right|\right| \ge \dots$$

$$\left[\left|\frac{2}{z}+\frac{2}{z^2}\right| \le \frac{2}{|z|}+\frac{2}{|z|^2} = \frac{2}{R}+\frac{2}{R^2} \le \frac{1}{2}\right]$$

$$\dots \ge \frac{1}{2}$$

לכן עבור R מספיק גדול

$$|f(z)| \le \frac{2}{R^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{8}{R^2}$$

$$\max_{\Gamma_R}|f(z)| \le \frac{8}{R^2}$$

$$\left|\int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le M\cdot 2\pi R = \frac{16\Pi}{R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

לפי סנדוויץ' $\int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$

תרגיל

הוכח אי שוויונים הבאים: $z = x+iy$

1. $\left|\int_\Gamma \left(x^2+iy^2\right)\mathrm{d}z\right| \le 2$, Γ קו ישר בין $-i$ ל-i.
2. $\left|\int_\Gamma \left(x^2+iy^2\right)\mathrm{d}z\right| \le \pi$, $\Gamma = \{z||z|=1, \mathrm{Re}(z)\ge 0\}$.
3. $\left|\int_\Gamma \frac{1}{z^2}\mathrm{d}z\right| \le 2$, קו ישר בין $-1+i$ ל-$1+i$.

פתרון

.1

$$\Gamma = \{z | z = iy, 1 \leq y \leq 1\}$$

$$\left|\int_\Gamma \left(x^2 + iy^2\right) \,\mathrm{d}z\right| = \int_\Gamma \left|x^2 + y^2\right| \{\mathrm{d}z\}$$

$$\left|x^2 + y^2\right| \leq \left|x^2\right| + \left|iy^2\right| = x^2 + y^2$$

לאורך Γ, $x = 0$

$$\left|\int_\Gamma \left(x^2 + iy^2\right) \,\mathrm{d}z\right| \leq \int_\Gamma 1 \cdot |\mathrm{d}z| =$$

$$= \int_{-1}^{1} |i \,\mathrm{d}z| = \int_{-1}^{1} |\mathrm{d}y| = 2\int_0^1 \,\mathrm{d}y = 2$$

.2

$$\left|\int_\Gamma \left(x^2 + iy^2\right) \,\mathrm{d}z\right| \leq \int_\Gamma \left(x^2 + y^2\right) |\mathrm{d}z| =$$

$$= \int_\Gamma |z|^2 \,|\mathrm{d}z| = \int_\Gamma |\mathrm{d}z| = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left|ie^{it} \,\mathrm{d}t\right| = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\mathrm{d}t| = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \,\mathrm{d}t = \pi$$

.3

$$\Gamma = \{z | z = x + i, -1 \leq x \leq 1\} \qquad f(z) = \frac{1}{z^2}$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2}$$

$$1 \leq |z| \leq \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{|z|} \leq 1$$

$$\boxed{\frac{1}{2} \leq \frac{1}{|z|^2} \leq 1}$$

$$\left|\int_\Gamma \frac{1}{z^2} \mathrm{d}z\right| \leq ML = 1 \cdot 2 = 2$$

תרגיל

הערך את הביטוי $\left|\int_0^{2\pi} e^{i\alpha t}\,\mathrm{d}t\right|$ בשני אופנים והסק כי $\left|e^{2\alpha\pi i}-1\right| \le 2\pi\left|\alpha\right|$.

פתרון

$$\left|\int_0^{2\pi} e^{i\alpha t}\,\mathrm{d}t\right| \le \int_0^{2\pi}\left|e^{i\alpha t}\right|\left|\mathrm{d}t\right| = \int_0^{2\pi} 1\cdot\left|\mathrm{d}t\right| = 2\pi$$

$$\left|\int_0^{2\pi} e^{i\alpha t}\,\mathrm{d}t\right| = \left|\frac{e^{i\alpha\cdot 2\pi}-1}{i\alpha}\right| = \frac{\left|e^{i\cdot 2\pi\alpha}-1\right|}{\left|i\alpha\right|} \le 2\pi$$

$$\boxed{\left|e^{i2\pi\alpha}-1\right| \le 2\pi\left|\alpha\right|}$$

■

משפט קושי־גורסא

יהי D תחום ששפתו חלקה למקוטעין, כך ש־D^c מורכב ממספר סופי של רכיבי קשירות, ותהי f אנליטית ב־D. אזי

$$\int_{\partial D} f\left(z\right)\,\mathrm{d}z = 0$$

דוגמה

$$f\left(z_0\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f\left(z\right)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z$$

[D - תחום פשוט קשר, ∂D חלוקה למקוטעין f אנליטית ב־$\overline{D}$)

$$f^{(n)}\left(z_0\right) = \frac{n!}{2\pi i}\int\frac{f\left(z\right)}{\left(z-z_0\right)^{n+1}}\,\mathrm{d}z$$

תרגיל

$$\int_{|z|=2} \frac{z-1}{\left(9+z^2\right)(z+i)} \mathrm{d}z$$

$f(z)=\dfrac{z-1}{9+z^2}$ פונקציה אנליטית ב$2 \leq |z|$

$$f(-i)=\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\left(\dfrac{z-1}{9+z^2}\right)}{(z-1-i)}\mathrm{d}z \Rightarrow \int_{|z|=2} \frac{z-1}{\left(9-z^2\right)(z+i)}\mathrm{d}z=$$

$$=2\pi i\cdot f(-i)=\frac{2\pi i\,(-i-1)}{8}=\frac{\pi i\,(-i-1)}{4}=\frac{(1-i)\,\pi}{4}$$