תזכורת

$$\operatorname{Res}(f,\alpha)=\frac{g(\alpha)}{h'(\alpha)}$$

כאשר $f=\dfrac{g(\alpha)}{h(\alpha)}$ ו-α הוא קוטב פשוט של $h(\alpha)$.

תרגיל

חשבו $I=\int_\Gamma \dfrac{\mathrm{d}t}{1+z^4}$. כאשר Γ מסילה סביב $\left[\frac{1}{2},2\right]\times[-i,i]$ נגד כיוון השעון.

פתרון

נקודות סינוגלריות של $f(z)=\dfrac{1}{1+z^4}$ הן

$$z_k=e^{\frac{\pi+2\pi k}{4}i}\qquad k=0,1,2,3$$

לכן לפי משפט השארית

$$I=2\pi i\left(\operatorname{Res}\left(f,e^{\frac{\pi}{4}i}\right)+\operatorname{Res}\left(f,e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)\right)$$

$$\operatorname{Res}\left(f,e^{\frac{\pi}{4}i}\right)=\left.\frac{1}{(1+z^4)'}\right|_{z=e^{\frac{\pi}{4}i}}=\frac{1}{4e^{\frac{3\pi}{4}i}}=\frac{e^{-\frac{3\pi}{4}i}}{4}$$

$$\operatorname{Res}\left(f,e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)=\cdots=\frac{e^{\frac{3\pi}{4}i}}{4}$$

$$I=\frac{\pi i}{2}\left(e^{\frac{3\pi}{4}i}+e^{-\frac{3\pi}{4}i}\right)=\pi i\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\pi i\sqrt{2}}{2}$$

תרגיל

$$I=\int_{|z|=2}\frac{z\cdot e^{\frac{1}{z-1}}}{(1-z)^2}$$

פתרון

$z=1$ היא נקודה סינגולרית עיקרית שנמצאת בתוך $|z| \leq 2$ $\Leftarrow$

$$I = 2\pi i \mathrm{Res}\left(f,1\right) \qquad f = \frac{z\cdot e^{1/z-1}}{\left(z-1\right)^2}$$

חייבים לפתח טור לורן.

$$e^{\frac{1}{z-1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(z-1\right)^{-n}}{n!}$$

$$z = \left(z-1\right)+1$$

$$f\left(z\right) = \frac{\left(z-1\right)}{\left(z-1\right)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(z-1\right)^{-n}}{n!} + \frac{1}{\left(z-1\right)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(z-1\right)^{-n}}{n!} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(z-1\right)^{-n-1}}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(z-1\right)^{-n-2}}{n!}$$

החלק $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{-n-2}}{n!}$ לא תורם לשארית(שכן החזקה -1 לא מופיעה בטור). לכן

$$a_{-1} = \frac{1}{0!} = 1$$

$$\mathrm{Res}\left(f,1\right) = 1$$

$$\boxed{I = 2\pi i}$$

תרגיל

$I = \int_{\Gamma}\frac{\sin z}{\left(z+1\right)^3}\,\mathrm{d}z$ כאשר Γ עקומה נגד כיוון השעון סביב $[-2,2]\times[-2i,2i]$.

פתרון

נקודה $z=-1$ היא היא קוטב מסדר 3(כי -1 הוא לא אפס של $\sin\left(z\right)$). נשתמש בנוסחה כללית לחישוב השארית.

$$\mathrm{Res}\left(f,\alpha\right) = \frac{1}{\left(m-1\right)!}\lim_{z\to\alpha}\left[\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\left(f\left(z\right)-\left(z-\alpha\right)^m\right)\right]$$

כאשר m הוא סדר של הקוטב.

$$\mathrm{Res}\left(f,-1\right) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to-1}\left[\left(\sin z\right)''\right] = \frac{-\sin\left(-1\right)}{2} = \frac{\sin\left(1\right)}{2}$$

$$I = \pi i \sin(1)$$

תרגיל

$$I = \int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2} \,\mathrm{d}z$$

פתרון

$z_1 = 0$ סליקה, $z_2 = \frac{\pi}{2}$ קוטב מסדר 2.

$$\lim_{z\to z_1} \frac{\sin z}{z\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{4}{\pi^2} \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = \underbrace{\frac{4}{\pi^2}}_{\text{finite}}$$

$\Leftarrow$ z_1סליקה $\Leftarrow$ $\mathrm{Res}(f, z_1) = 0$

$z_2 = \frac{\pi}{2}$ $\Leftarrow$ קוטב מסדר שני, ולכן לפי אותה השיטה כמו בתרגיל הקודם:

$$\mathrm{Res}\left(f, \frac{\pi}{2}\right) = 1 \cdot \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \left[\left(\frac{\sin z}{z}\right)'\right] = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{z\cos z - \sin z}{z^2} = -\frac{4}{\pi^2}$$

$$I = 2\pi i \left[\mathrm{Res}(f, z_1) + \mathrm{Res}(f, z_2)\right] = 2\pi i \left[0 - \frac{4}{\pi^2}\right] = -\frac{8i}{\pi}$$

עקרון הארגומנט

תהי f מוגדרת בתחום D ו-Γ מסלול סגור המוכל יחד עם הפנים שלו ב-D כך שמתקיים:

1. f אנליטית ואין לה אפסים על Γ.
2. ל-f מספר סופי של נקודות סינגולריות בתוך Γ, כך שכולן קטבים.

אזי מתקיים:

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f'(z)}{f(z)} \,\mathrm{d}z = N - P$$

כאשר N מספר האפסים של $f(z)$(כאשר אפס מסדר m נספר m פעמים) ו-P מספר הקטבים של $f(z)$ כאשר קוטב מסדר n נספר n פעמים.

הערך $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \,\mathrm{d}z$ נקרא אינדקס של $f(\Gamma)$ והוא מספר פעמים שהמסלול $f(\Gamma)$ מקיף את הראשית.

תרגיל

חשבו $I=\int_{|z|=2}\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z$ כאשר $f(z)=\frac{(z+3)(z+1)}{z^2}$

פתרון

- $\begin{cases} z=-3 \\ z=-1 \end{cases}$ ⇐ אפסים פשוטים של $f(z)$.
- $\{z=0$ ⇐ קוטב מסדר 2 של $f(z)$.

⇐$P=2$ $\qquad N=2i$

$$I=2\pi i\,(N-P)=0$$

$$f=(z-2)^m\,g(z)$$

תרגיל

$$I=\int_{|z|=1}\frac{\sin 2z}{\sin^2 z-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}z$$

פתרון

נגדיר

$$f(z)=\sin^2 z-\frac{1}{2}$$

$$f'(z)=2\sin z\cdot\cos z=\sin(2z)$$

$$I=\int_{|z|=1}\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z$$

$$\sin^2 z-\frac{1}{2}=0\Rightarrow\sin z=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z=\pm\frac{\pi}{4}+\pi k\qquad k\in\mathbb{Z}$$

בתוך Γ יש ל$f(Z)$ שני אפסים ⇐ $N=2$

$f'(z)=\sin 2z$ ⇐ $f'\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)=\pm\sin\frac{\pi}{2}=\pm1\neq0$ ⇐ אפסים הם פשוטים.

פונקציה $f\left(z\right)$ היא פונקציה אנליטית ולכן אין לה נקודות סינגולריות(ובפרט קטבים)$\Leftarrow P=$
$0 \Leftarrow$

$$I=2\pi i\left(N-P\right)=2\pi i\cdot 2=4\pi i$$

משפט רושה

יהיו f,g אנליטיות בתחום D, Γ קנטור סגור המוכל יחד עם הפנים שלו בD.
אם לכל $z\in G$: $\left|f\left(z\right)\right|>\left|g\left(z\right)\right|$ אזי ל$f\left(z\right)$ ול$\left(f+g\right)\left(Z\right)$ יש אותו מספר שורשים בפנים של Γ, כאשר שורש מסדר m נספר m פעמים.

תרגיל

נתון $\left|a\right|<e^{-1}$. צ"ל שלא קיים מספר $\left|z\right|<1$ כך שמתקיים $e^{z}=az^{3}$.

הוכחה

נגדיר $g\left(z\right)=-az^{3}$, $f\left(z\right)=e^{z}$, $\Gamma=\left\{ z\middle|\left|z\right|=1\right\}$. כעת:

$$\left|g\left(z\right)\right|\Big|_{\Gamma}=\left|at^{2}\right|\Big|_{\Gamma}=\left|a\right|$$

$$\left|f\left(z\right)\right|=\left|e^{z}\right|=\left|e^{x}\cdot e^{iy}\right|=e^{x}\Big|_{\Gamma}\geq e^{-1}>\left|a\right|=\left|g\left(z\right)\right|$$

לכן, לפי משפט רושה, ל$f\left(z\right)=e^{z}$ ול$\left(f+g\right)\left(z\right)=e^{z}-az^{3}$ יש אותו מספר שורשים.
ל$f\left(z\right)$ אין שורשים בתוך $\Gamma \Leftarrow$ גם ל$e^{z}=az^{3}$ אין שורשים כאשר $\left|z\right|<1$.

תרגיל

כמה פתרונות יש ל$z^{3}+5z+1=0$?

א) בעיגול: $D_{1}=\left\{ z\middle|\left|z\right|<1\right\}$

ב) בטבעת: $D_{2}=\left\{ z\middle|1<\left|z\right|<2\right\}$

פתרון

א) נגדיר $g\left(z\right)=z^{4}+1 \qquad f\left(z\right)=5z$

$$\left|f\left(z\right)\right|=\left|5z\right|\overset{\left|z\right|=1}{=}5$$

$$\left|g\left(z\right)\right|=\left|z^{4}+1\right|\leq\left|z^{4}\right|+\left|1\right|=2$$

$\Leftarrow |f(z)| < |g(z)| \Leftarrow$ל$f(z) = 5z$ יש אותו מספר שורשים כמו ל$= z^4 + 5z + 1$ $.(f+g)(z)$

ל$f(z)$ יש אפס פשוט $\Leftarrow$ גם לפונקציה המקורית יש רק אפס אחד בתוך D_1.

ב) משפט רושה לא מוגדר עבור טבעותוו, ולכן נצטרך למצוא מספר שורשים בעיגול החיצוני ולהפחית ממנו את מספר השורשים בעיגול הפנימי.

נגדיר: $g(z) = 5z + 1 \qquad f(z) = z^4$

על המעגל $|z| = 2$:

$$|f(z)| = \left|z^4\right| = 16$$

$$|g(z)| = |5z + 1| \leq |5z| + 1 = 11$$

$$|f(z)| > |g(z)|$$

$\Leftarrow$ ל$f(z)$ ולפונקציה המקורית יש אותו מספר אפסים.ל$f(z) = z^2 = 0$ יש 4 שורשים($z = 0$ מסדר 4). מסעיף א' יודעים שבתוך D_1 יש אפס אחד בלבד.

נוודא שעל המעגל $|z| = 1$ אין שורשים. לפי סעיף א', על מעגל היחידה מתקיים

$$|5z| > \left|z^4 + 1\right|$$

ולכן

$$\left|z^4 + 5z + 1\right| = \left|(5z) + \left(z^4 + 1\right)\right| \geq \left||5z| - \left|z^4 + 1\right|\right| > 0$$

$\Leftarrow$אין שורשים על מעגל היחידה, ולכן יש בדיוק 3 אפסים בטבעת.