פתרון תרגיל בית 6 – טופולוגיה

<u>שאלה 1</u>

קבעו לגבי כל אחת מהפונקציות הבאות אם היא פתוחה/ סגורה/ רציפה:

א. $f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f_1(x)=\begin{cases}\frac{1}{|x|} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$.

ב. $f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f_2(x)=\chi_{\mathbb{Q}}=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$.

ג. $f_3:X\to\mathbb{R}$ עבור $X=[2,3]\cup[4,5)$ המוגדרת ע"י $f_3(x)=\begin{cases}1 & x\in[2,3]\\ x & x\in[4,5)\end{cases}$.

<u>פתרון</u>

א. הפונקציה <u>לא רציפה</u> שכן אינה רציפה ב-0. ניתן להוכיח למשל עפ"י
היינה $\frac{1}{n}\to 0$ אבל $f_1\left(\frac{1}{n}\right)=n\not\to 1=f_1(0)$.

הפונקציה <u>אינה פתוחה</u> כי למשל $(-1,1)$ פתוחה ב $\mathbb{R}$ אבל
$f_1((-1,1))=[1,\infty)$ שאינה פתוחה ב $\mathbb{R}$.

הפונקציה <u>אינה סגורה</u> כי למשל $[0,\infty)$ סגורה ב $\mathbb{R}$ אבל
$f_1([0,\infty))=\{1\}\cup(0,\infty)=(0,\infty)$ ו- $(0,\infty)$ אינה סגורה ב $\mathbb{R}$.

ב. הפונקציה <u>לא רציפה</u>. ניתן להוכיח זאת למשל ע"י כך ש $\{1\}$ סגורה ב $\mathbb{R}$
אבל $f_2^{-1}(\{1\})=\mathbb{Q}$ אינה סגורה ב $\mathbb{R}$.

הפונקציה <u>אינה פתוחה</u>: $\mathbb{R}$ פתוחה ב $\mathbb{R}$ אבל $f_2(\mathbb{R})=\{0,1\}$ שאינה פתוחה ב $\mathbb{R}$.

הפונקציה <u>סגורה</u>: לכל $A\subseteq\mathbb{R}$ (ובפרט עבור A סגורה) $f_2(A)$ סגורה.
אמנם, אם $A=\varnothing$ נקבל $f_2(A)=\varnothing$. אם $\varnothing\neq A\subseteq\mathbb{Q}$ נקבל $f_2(A)=\{1\}$. אם $\varnothing\neq A\subseteq\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ נקבל $f_2(A)=\{0\}$ ובכל מקרה אחר נקבל $f_2(A)=\{0,1\}$.

ג. הפונקציה <u>רציפה</u> שכן היא מוגדרת באמצעות שתי הפונקציות הבאות:
$h:[2,3]\to\mathbb{R},\quad h(x)=1$, $g:[4,5)\to\mathbb{R},\quad g(x)=x$. שתי הפונקציות רציפות (h פונקציה קבועה ו- g פונקציית ההכלה). $\{[2,3],[4,5)\}$ כיסוי פתוח ל X

(למעשה $[2,3]$ וכן $[4,5)$ אפילו סגורות ב X (בדקו!)). $[2,3]\cap[4,5)=\varnothing$.
לכן מתקיימים תנאי המשפט שמבטיח רציפות של f_3.

הפונקציה <u>לא פתוחה</u> ו<u>לא סגורה</u> שכן $[4,5)$ סגוחה ב- X אבל $f_3([4,5))=[4,5)$ לא פתוחה ולא סגורה ב- $\mathbb{R}$.

<u>שאלה 2</u>

יהיה X מ"ט. $A\subseteq X$ תת מרחב, אזי $S\subseteq A$ סגורה ב- A $\Leftrightarrow$ קיימת $Q\subseteq X$ סגורה ב- X כך ש- $S=Q\bigcap A$.

<u>פתרון</u>

$\Rightarrow$ קיימת $Q\subseteq X$ סגורה ב- X כך ש- $S=Q\bigcap A$, צריך להוכיח שְ- S סגורה בְּ- A. נשים לב שמתקיים: $A\setminus S=A\setminus(Q\bigcap A)=A\bigcap(X\setminus Q)$. $(X\setminus Q)$ הינה קבוצה פתוחה ב- X ולכן לפי הגדרת תת מרחב טופולוגי $A\bigcap(X\setminus Q)$ פתוחה ב- A.
מכאן נובע שְ- $A\setminus S$ פתוחה ב- A ולכן S סגורה ב- A.

$\Leftarrow$ נתון כי $S\subseteq A$ סגורה ב- A, נבנה $Q\subseteq X$ סגורה ב- X כך ש- $S=Q\bigcap A$.
היות וְ- S סגורה, המשלים שלה בְּ- A פתוח, ולכן קיימת $V\subseteq X$ פתוחה ב- X כך שְ- $A\setminus S=V\bigcap A$. מכאן, $A\setminus(A\setminus S)=A\setminus(V\bigcap A)$ $\Leftarrow$ $S=A\setminus V$. מצד שני, נשים לב כי $A\setminus V=A\bigcap(X\setminus V)$. לכן, בסה"כ, $S=A\bigcap(X\setminus V)$. נבחר $Q=X\setminus V$ ונקבל את הדרוש.

<u>שאלה 3</u>

הוכיחו:

א. כל פונקציה ממרחב טופולוגי דיסקרטי לכל מרחב טופולוגי אחר – הינה רציפה.
ב. כל פונקציה ממרחב טופולוגי כלשהו למרחב הטופולוגי הטריוויאלי – הינה רציפה.

ג. תהי $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ רציפה. נניח כי $\tau_3\subseteq\tau_2$ וגם $\tau_1\subseteq\tau_4$. הוכיחו כי $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_3)$ וגם $f:(X,\tau_4)\to(Y,\tau_2)$ רציפות.

<u>פתרון</u>

א. תהי $f:(X,\tau_{disc})\to(Y,\tau)$ פונקציה ממרחב טופולוגי דיסקרטי למרחב טופולוגי כלשהו. במ"ט דיסקרטי כל קבוצה היא פתוחה, ולכן $\forall U\subseteq Y$ פתוחה, גם $f^{-1}(U)\subseteq X$ פתוחה. ומהגדרת הרציפות נובע כי f רציפה.

ב. תהי $f:(X,\tau)\to(Y,\tau_{trivial})$. נוכיח שהיא רציפה. כזכור, בטופולוגיה הטריוויאלית יש רק שתי קבוצות פתוחות: הקבוצה הריקה והמרחב עצמו. לכן עלינו לבדוק רק שתי תמונות הפוכות.
$f^{-1}(Y)=X$, $f^{-1}(\varnothing)=\varnothing$ ואלה הן שתי קבוצות פתוחות במרחב המקור.
לכן (לפי ההגדרה) f רציפה.

ג. $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ רציפה. לכן לכל $U\in\tau_2$ מתקיים $f^{-1}(U)\in\tau_1$. אבל, $\tau_3\subseteq\tau_2$, ולכן לכל $U\in\tau_3$ מתקיים $f^{-1}(U)\in\tau_1$. מהגדרת הרציפות נובע שֶ- $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_3)$ רציפה.
כמו כן, אם $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ רציפה, לכל $U\in\tau_2$ מתקיים $f^{-1}(U)\in\tau_4$, היות וְ- $\tau_1\subseteq\tau_4$. לכן $f:(X,\tau_4)\to(Y,\tau_2)$ רציפה גם כן.

<u>שאלה 4</u>

תהי $f:X\to Y$ פונקציה בין שני מרחבים טופולוגיים. ניתן לראות את $f(X)$ כתת מרחב טופולוגי של Y.

א. הוכיחו שאם f פתוחה [סגורה] כפונקציה מ- X ל- Y אזי היא פתוחה [סגורה] כפונקציה מ- X ל-$f(X)$.

ב. הראו ע"י שתי דוגמאות נגדיות שמהעובדה ש- f פתוחה [סגורה] כפונקציה מ- X ל-$f(X)$ לא נובע ש- f פתוחה [סגורה] כפונקציה מ- X ל- Y.

<u>פתרון</u>

א. תהי $f:X\to Y$.
1) נניח ש $f:X\to Y$ פתוחה ונוכיח ש $f:X\to f(X)$ פתוחה. תהי U פתוחה ב- X. מההנחה מתקיים $f(U)$ פתוחה ב Y. מתקיים $f(U)\subseteq f(X)$ ולכן $f(U)=f(U)\cap f(X)$. מכיון ש $f(U)$ פתוחה ב

Y וכן $f(U)=f(U)\cap f(X)$ נקבל עפ"י הגדרת טופולוגית תת מרחב ש $f(U)$ פתוחה ב $f(X)$.

2) ההוכחה של המקרה שבן נתון ש $f:X\to Y$ סגורה וצ"ל ש $f:X\to f(X)$ סגורה, דומה מאד להוכחה של סעיף א. רק בשלב הסופי יש להיעזר בתרגיל בית שמדבר על אפיון קבוצה סגורה בטופולוגית תת מרחב.

ב.

1) דוגמה נגדית לעובדה שמכך ש- $f:X\to f(X)$ פתוחה לא נובע ש- $f:X\to Y$ פתוחה.
יהיו $Y=\mathbb{R}$, $X=\mathbb{Z}$ ו $f=i$ העתקת ההכלה. כלומר $f(x)=x$. ברור ש $f(X)=\mathbb{Z}$ והפונקציה $f:X\to f(X)$ פתוחה שכן היא למעשה פונקצית הזהות מ $\mathbb{Z}$ על $\mathbb{Z}$. אבל, $i:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ אינה פתוחה כי למשל $\mathbb{Z}$ פתוחה ב $\mathbb{Z}$ אבל $i(\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$ אינה פתוחה ב $\mathbb{R}$.

2) דוגמה נגדית שניה: $f:X\to f(X)$ סגורה ו- $f:X\to Y$ אינה סגורה.
יהיו $Y=\mathbb{R}$, $X=\mathbb{Q}$ ו- $f=i$ העתקת ההכלה כלומר $f(x)=x$.
ברור ש $f(X)=\mathbb{Q}$ והפונקציה $f:X\to f(X)$ סגורה שכן היא למעשה פונקצית הזהות מ $\mathbb{Q}$ על $\mathbb{Q}$. מצד שני $i:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ אינה סגורה כי למשל $\mathbb{Q}$ סגורה ב $\mathbb{Q}$ אבל $i(\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$ אינה סגורה ב $\mathbb{R}$.

<u>הערה</u>: דוגמה נגדית 2 היתה יכולה לשמש גם כדוגמה נגדית לסעיף 1) שכן הפונקציה $i:\mathbb{Q}\to i(\mathbb{Q})$ היא גם פתוחה והפונקציה $i:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ אינה פתוחה כי $\mathbb{Q}$ פתוחה ב $\mathbb{Q}$ אבל $i(\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$ אינה פתוחה ב $\mathbb{R}$.

<u>שאלה 5</u>

יהיו $m,c\in\mathbb{R}$ שני מספרים נתונים. נגדיר תת מרחב של $\mathbb{R}^2$:
$X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=mx+c\}$. הוכיחו ש- X הומיאומורפי ל- $\mathbb{R}$.

<u>פתרון</u>

תהי $p_1:X\to\mathbb{R}$ פונקציית ההטלה על הרכיב הראשון. היא הפיכה שכן $f:\mathbb{R}\to X$ המוגדרת ע"י $f(x)=(x,mx+c)$ היא ההופכית שלה. אכן,
$f(p_1(x,mx+c))=f(x)=mx+c$, $p_1(f(x))=p_1(x,mx+x)=x$. $p_1:X\to\mathbb{R}$ רציפה

שכן היא מתקבלת מצמצום התחום ל X של פונקציית ההטלה הרציפה (הוכחנו בעבר) $p_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. נוכיח ש-$f=p_1^{-1}$ רציפה ונסיק ש- p_1 הומיאומורפיזם.

נראה רציפות של f בנקודה שרירותית $r\in\mathbb{R}$. יהי $\varepsilon>0$ נבחר $\delta=\begin{cases}\min\left\{\frac{\varepsilon}{|m|},\varepsilon\right\} & m\neq 0\\ \varepsilon & m=0\end{cases}$. אזי $\delta>0$ ולכל $x\in\mathbb{R}$ המקיים $|x-r|<\delta$ מתקיים

$$d_{\max}(f(x),f(r))=d_{\max}\left((x,mx+c),(r,mr+c)\right)=\max\{|x-r|,|m||x-r|\}$$
$$<\max\{|m|\delta,\delta\}\leq\varepsilon$$

שאלה 6

יהי $(X,\|\ \|)$ מרחב נורמי, $a\in X, c\in\mathbb{R}$.הוכיחו שהפונקציות הבאות רציפות:

1. העתקת הנורמה- $f:(X,\|\ \|)\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x)=\|x\|$ (שני המרחבים הם מרחבים מטריים).
2. הזזה- $g:(X,\|\ \|)\to(X,\|\ \|)$ המוגדרת ע"י $g(x)=x+a$.
3. כפל בסקלר- $h:(X,\|\ \|)\to(X,\|\ \|)$ המוגדרת ע"י $h(x)=cx$.
4. הסיקו כי כל כדור פתוח $B(a,\varepsilon)$ ($\varepsilon>0,\ a\in X$) הומיאומורפי ל-$B(0,1)$.

פתרון

1. נראה רציפות בנקודה שרירותית x. יהי $\varepsilon>0$. נבחר $\delta=\varepsilon$ ונקבל שלכל $y\in X$ המקיימת $\|x-y\|<\delta$ מתקיים $|f(x)-f(y)|=|\|x\|-\|y\||\leq\|x-y\|<\delta=\varepsilon$.
   נוכיח את אי השוויון $|\|x\|-\|y\||\leq\|x-y\|$ עפ"י אי שוויון המשולש של הנורמה $\|x\|=\|x-y+y\|\leq\|x-y\|+\|y\|\to\|x-y\|\geq\|x\|-\|y\|$ ניתן להוכיח בצורה דומה $\|x-y\|\geq\|y\|-\|x\|$ ולכן בסה"כ $|\|x\|-\|y\||\leq\|x-y\|$.

2. נראה רציפות בנקודה שרירותית x. יהי $\varepsilon > 0$. נבחר $\delta = \varepsilon$ ונקבל שלכל $y \in X$ המקיימת $\|x-y\| < \delta$ מתקיים
$\|g(x)-g(y)\| = \|x+a-(y+a)\| = \|x-y\| < \delta = \varepsilon$.

3. אם $c=0$ נקבל העתקה קבועה. (העתקת האפס) והיא רציפה. עבור $c \neq 0$ נוכיח רציפות בנקודה שרירותית x. עבור $\varepsilon > 0$ ניתן לקחת $\delta = \frac{\varepsilon}{|c|}$ ולקבל הדרוש.

4. תהי $h: B(a,\varepsilon) \to B(0,1)$ העתקה המוגדרת ע"י $h(z) = \frac{1}{\varepsilon}(z-a)$ (קל לבדוק שאכן התמונה מוכלת בכדור היחידה) זו העתקה רציפה עפ"י סעיפים 2,3 (הזזה בווקטור $-a$ וכפל בסקלר $\frac{1}{\varepsilon}$) ו- $h^{-1}: B(0,1) \to B(a,\varepsilon)$ ההופכית של h היא הפונקציה $h^{-1}(z) = \varepsilon z + a$ שמוגדרת אף היא באמצעות כפל בסקלר והזזה ולכן רציפה אף היא עפ"י הסעיפים הקודמים. מכאן ש $B(0,1)$ ו- $B(a,\varepsilon)$ הומיאומורפיים.