

תרגום:

5.13

הנחך תרגום

דבר מניח של זמן - מידה

תהליך אורטוגונלליזציה

קורה טוב ביותר קטגוריה

הצגת מונחים של סלענות אורטוגונליות

אורטוגונליות עם העקום

כל תרגום מספר 4 - מרחב הולקרה

מאה 5, 1000

הזמן המוקדש מהווה מטרות מרחב

$$f(x, y) = \sqrt{x-y}$$

$$\sqrt{\alpha+\beta} \leq \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$$

נרצה להוכיח את אי-שוויון המשולש

$$f(\alpha, \beta) = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha+\beta}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{2\sqrt{\alpha+\beta}} \geq 0 \quad f(\alpha) \uparrow$$

$$f(0,) = 0$$

$$x-y = (x-z) + (z-y)$$

$$\alpha = (x+z), \quad \beta = (z-y)$$

מסקנה: המטריקה מקיימת את אי-שוויון המשולש

סעיף 2

לא מהווה מטריקה, כי קיימות $x, y \neq 0$ כך שהמטריקה מתאפסת

$$x=0, y=\pi$$

סעיף 3

$$f(x, y) = |e^x - e^y|$$

$$= |e^x - e^z + e^z - e^y|$$

$$\leq |e^x - e^z| + |e^z - e^y|$$

מקיים את אי-שוויון המשולש, ולכן מטריקה.

סעיף ה' :

$$\rho(x,y) = |x^3 - y^3| = |(x^3 - z^3) + (z^3 - y^3)| \leq |x^3 - z^3| + |z^3 - y^3|$$

טענה 2

הוכח כי בהרחבה הישירה מתקיים

$$I) \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle u, v \rangle$$

$$II) \|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle u, v \rangle$$

$$III) \|u+iv\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\operatorname{Im}\langle u, v \rangle$$

$$IV) \|u-iv\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\operatorname{Im}\langle u, v \rangle$$

$$I - II \Rightarrow \|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 4\operatorname{Re}\langle u, v \rangle \quad (*)$$

$$III - IV \Rightarrow \|u+iv\|^2 - \|u-iv\|^2 = 4\operatorname{Im}\langle u, v \rangle \quad / \cdot i$$

$$\|u+iv\|^2 - \|u-iv\|^2 = 4 \cdot i \cdot \operatorname{Im}\langle u, v \rangle \quad (**)$$

$$(*) + (**) \Rightarrow \|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + \|u+iv\|^2 - \|u-iv\|^2 = 4\langle u, v \rangle$$

ומתקבלים :

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4} [\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + \|u+iv\|^2 - \|u-iv\|^2]$$

נוסחה זו נקראת נוסחת הפונדרינלר

היא אינה מכסלה פנימית במהותה.

אנחנו הוכחנו כי נוסחה זו, הנחשבת מכסלה פנימית וקבועה את אגף ימין.

אם נתון הביטוי של אגף ימין, ונרצה להוכיח את קיום הכללים

של מכסלה פנימית, אזי נצטרך לכלם התקבילות בעזרתם של

כלל הדרישות של מכסלה פנימית.

טענה 3 : ואם אנחנו להגדיר מכסלה פנימית בהרחבה ℓ^p

כדי שההרחבה יהיה הישירה?

פתרון :

$$x \in \ell^p$$

$$x = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p < \infty$$

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p \right)^{1/p}$$

נבדוק שהצורה הזו היא טורם המקבילית.

נניח x, y נבדוק, ניקח x, y

$$x = \{1, 1, 0, 0, \dots\}$$

$$y = \{1, -1, 0, \dots\}$$

$$\|x\| = \|y\| = 2^{1/p}$$

$$\|x\| = (1^p + 1^p)^{1/p} = 2^{1/p}$$

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 = 2^{2/p}$$

$$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 2^{2/p+1}$$

$$\|x+y\| = 2$$

$$\|x-y\| = 2$$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 4 + 4 = 8 = 2^3$$

נבדוק טורם קיים הטיוח (הטורם המקבילית).

$$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \stackrel{?}{=} \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$$

$$2^{2/p+2} = 2^3$$

$$\frac{2}{p} + 2 = 3$$

$$2/p = 1 \Rightarrow \boxed{p = 2}$$

מסקנה: רק עבור $p = 2$ מתקיים טורם המקבילית.

(עבור הצורה שבחרנו).

צורת מרחב לורנצ-שטראוס

ניתנה מרחב ציגלר n -ממדי, במרחב נבדוק כיצד

המרחב שמתרחב מתאם, אנו כל ציגלר סטנדרט

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n = 0$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

לזר

נכפיל את המשוואה הזו ב δ_n ונכנסה סכימה ב- u_1

$$\alpha_1 \langle u_1, u_1 \rangle + \alpha_2 \langle u_1, u_2 \rangle + \dots + \alpha_n \langle u_1, u_n \rangle = 0$$

באופן דומה נכפיל ב- u_2 ונקבל:

$$\alpha_1 \langle u_2, u_1 \rangle + \alpha_2 \langle u_2, u_2 \rangle + \dots + \alpha_n \langle u_2, u_n \rangle = 0$$

$$\vdots$$

$$\alpha_1 \langle u_n, u_1 \rangle + \alpha_2 \langle u_n, u_2 \rangle + \dots + \alpha_n \langle u_n, u_n \rangle = 0$$

הזוהי מערכת $\{u_i\}$ שאם תמיד, אזי המשוואות לא תלויות.

נחשב כעתון מונה ההסתרון הסכימי. בהינן $\delta_n \neq 0$

נכנס את הצרכיוננה הסכית כוונקציות

$$\delta_n = \begin{vmatrix} \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \langle \phi_1, \phi_2 \rangle & \dots & \langle \phi_1, \phi_n \rangle \\ \langle \phi_2, \phi_1 \rangle & \langle \phi_2, \phi_2 \rangle & \dots & \langle \phi_2, \phi_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \phi_n, \phi_1 \rangle & \langle \phi_n, \phi_2 \rangle & \dots & \langle \phi_n, \phi_n \rangle \end{vmatrix}$$

קבלנו צרכיוננה הנקרות צרכיוננה ב- δ_n שמת.

נסמן $Q_n(x)$ - ~~המטריצה~~ ~~המטריצה~~ ~~המטריצה~~

$$Q_n(x) = \begin{vmatrix} \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \langle \phi_1, \phi_2 \rangle & \dots & \langle \phi_1, \phi_n \rangle & \phi_1 \\ \langle \phi_2, \phi_1 \rangle & \langle \phi_2, \phi_2 \rangle & \dots & \langle \phi_2, \phi_n \rangle & \phi_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle \phi_n, \phi_1 \rangle & \langle \phi_n, \phi_2 \rangle & \dots & \langle \phi_n, \phi_n \rangle & \phi_n \end{vmatrix}$$

נלום את המכסלה הסכימית

$$\langle Q_n(x), \phi_k \rangle \quad k = 1, 2, \dots, n$$

מכסלה צרכיוננה הסכימית, כיתה המכסלה אורה (סמוכה וחת באותה הסכימית).

$$\langle Q_n(x), \varphi_k(x) \rangle = \begin{cases} 0 & k < n \\ \delta_n \neq 0 & k = n \end{cases}$$

אם $k < n$ נקבע בטרמינליות עם 2 סחובות בלבד, ולכן 0
נכתה את $Q_n(x)$

$$Q_n(x) = \varphi_n \cdot \delta_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \varphi_k$$

נתיבון את כנסה הסכמית

$$\langle Q_n(x), Q_n(x) \rangle = \delta_n \cdot \delta_{n-1}$$

$$\langle Q_n(x), Q_n(x) \rangle = \|Q_n(x)\|^2 \geq 0$$

$$\langle Q_n(x), \varphi_n \delta_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \varphi_k \rangle = \underbrace{\delta_{n-1}}_{\delta_n} \langle Q_n(x), \varphi_n \rangle + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \underbrace{\langle Q_n(x), \varphi_k \rangle}_{0}$$

$$\delta_{n-1} \cdot \delta_n = \|Q_n(x)\|^2$$

לסכית $\{Q_n(x)\}$ הינה הסכית אורתוגונלית

$$\langle Q_n(x), Q_k(x) \rangle = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ \|Q_n(x)\|^2 & k = n \end{cases}$$

ננרמם את הסכית, ע"י חלוקה ב- $\|Q_n(x)\|^2$

נסמן את הוקטור הנורמל ג- $\hat{Q}_n(x)$

$$\hat{Q}_n(x) = \frac{Q_n(x)}{\|Q_n(x)\|} = \frac{1}{\sqrt{\delta_n \delta_{n-1}}} Q_n(x)$$

$$\hat{Q}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\delta_n \delta_{n-1}}} \begin{pmatrix} \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & \dots & \langle \varphi_1, \varphi_{n-1} \rangle & \varphi_1 \\ \langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle & & \langle \varphi_2, \varphi_{n-1} \rangle & \varphi_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ \langle \varphi_n, \varphi_1 \rangle & & \langle \varphi_n, \varphi_{n-1} \rangle & \varphi_n \end{pmatrix}$$

ו, טורה $\delta - \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle$ ולכן חזרה

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \langle \phi_1, \phi_2 \rangle \\ \langle \phi_2, \phi_1 \rangle & \langle \phi_2, \phi_2 \rangle \end{vmatrix} > 0$$

לפי משפט קרני-מורלי.
ובאונדוקציה של זה אכן א-ס.

מכיוון שמכירת המערכים הראשונים חיונית,
המערכים של חיונית מוצקת.

מכסה פנימית עם מקדם.

הקצרה: אומרים שמוקציה $P(x)$ של (a, b) הינה מוקצית
למקדם אם:

$$I) P(x) \geq 0$$

$$II) \int_a^b P(x) dx > 0$$

עבור $(-\infty, \infty)$ מתווסף עוד תנאי

$$III) \int_{-\infty}^{\infty} P(x) |x|^n dx < \infty$$

$$\mu_n = \int_a^b P(x) x^n dx$$

הקוטל
יקטו וממומנט ה- n , של $P(x)$

הערה: אם עבור תנאי II האינטגרל שווה 1, ואז
לא יתווסף לקוטל מוקציה נכסות הסתברות.

כעת נתבונן במערכת $\{x^0, x^1, x^2, \dots, x^n\}$
וקטורים המרחב (L^2) (מרחב המוקציות הרצפות תחת L^2).

$$\|x\| = \sup \{x\}$$

$$\langle x, y \rangle = \int_a^b x^i y^j dx$$

נציג את המערכת המעריכית / צטרמינוטל, מקימטי, עמים.

$$P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1}}} \begin{vmatrix} \langle 1, 4 \rangle & \langle 1, x \rangle & & \langle 1, x^{n-1} \rangle & 1 \\ \langle x, 1 \rangle & \langle x, x \rangle & & \langle x, x^{n-1} \rangle & x \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \langle x^n, x^{n-1} \rangle & x^n \end{vmatrix}$$

$$P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1}}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & & \mu_{n-1} & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & & \mu_n & x \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \mu_{n-1} & x^n \end{vmatrix}$$

$\tilde{P}_n(x)$ יהווה קבוצה של פולינומים ממעלה n מסדר n .

המערכת $\{\tilde{P}_n(x)\}$ יהווה מערכת אורתונורמלית.

בדרך קלה עתה נגלה כי הם גם בסיס הולץ הנ"ל עבור מערכות עם יותר מ-6 איברים גזתי-תלויים במערכת הרטונלית.

~~מכאן נובע~~

מערכות פולינומים אורתונורמליים וקטורים.

הסדר	$P_n(x)$	הטקס $w(x)$	קטע	שם
	$P_n(x)$	1	$[-1, 1]$	Legendre
1 עיג	$T_n(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$[-1, 1]$	Chebyshev
2 עיג	$U_n(x)$	$\sqrt{1-x^2}$	$[-1, 1]$	צ'בישב
3 עיג	$V_n(x)$	$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$	$[-1, 1]$	=
4 עיג	$W_n(x)$	$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$	$[-1, 1]$	=
$\alpha, \beta > -1$	$J_n(\alpha, \beta)(x)$	$(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$	$[-1, 1]$	Jacobi יעקובי

הפולינומים של עזרזר, ולביטה היום נקרים פולינומים של
הפולינומים של יסקרה!

הצביעה (ו-) α, β בטבל טבלים
(מינימום)

$$\int_{-1}^1 p(x) dx = \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx < \infty$$

שם	קטע	הטבל $p(x)$	$P_n(x)$	אנדר
Hermit	$(-\infty, \infty)$	e^{-x^2}	$H_n(x)$	
Laguerre	$(0, +\infty)$	$e^{-x} x^\alpha$	$L_n^\alpha(x)$	$\alpha \geq 0$
Berstein-Szegő	$[-1, 1]$	$\frac{w_k(x)}{p_k(x)}$		$0 \leq f(x) \leq 1$ מחזור מחזור של צביטה

$$p(x) = \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}}$$

הרעיון: נתבונן במחזוריות והטבל

$$0 \leq k \leq 1$$

הקטע $[0, 1]$

אגור $k=0$ נקבע את עזרזר
אגור $k=1$ נקבע את צביטה