פתרון תרגיל 8 – חשבון אינפיניטסימלי 2 למדעי המחשב

1. נתון כי לכל n מתקיים $0 \le a_n \le b_n$. הוכיחו או הפריכו:

אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n b_n$ מתכנס, אז גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ מתכנס.

הוכחה: לפי הנתון, טור החזקות $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ מתכנס בנקודה $x=-2$. לכן לפי משפט הוא מתכנס בהחלט בתחום $|x|<2$ (ואולי אפילו בתחום יותר גדול). בפרט עבור $x=1$ נקבל שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס. כיוון ש־$0 \le a_n \le b_n$, נקבל ממבחן ההשוואה הראשון שגם הטור (החיובי) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס. לפיכך הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ מתכנס בהחלט, ובפרט מתכנס כרצוי.

2. חשבו את רדיוס ההתכנסות של טורי החזקות הבאים:

(א) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n\ln n}$ (ב) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}(x-1)^n$ (ג) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}$

פתרון:

(א) כאן $a_n = \frac{(-1)^n}{n\ln n}$ ומתקיים

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\ln(n+1)}{n\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln n}$$

$$= 1\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1$$

כאשר השתמשנו בסוף בכלל לופיטל. לכן ממשפט דלאמבר: $\boldsymbol{R=1}$.

(ב) כאן $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ ומתקיים

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$$

לכן ממשפט קושי־אדמר: $\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{e}$ ונקבל $\boldsymbol{R=e}$.

(ג) נשים לב כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}$ כאשר $a_n = \begin{cases} 1 & n = k! \ for \ some \ k \in \mathbb{N} \\ 0 & otherwise \end{cases}$.

אמנם לא קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, אבל $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ (מתקבל ע"י תת־הסדרה בה $n_k = k!$ ו־$a_{n_k} = 1$). לכן ממשפט קושי־אדמר: $\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ ונסיק $\boldsymbol{R = 1}$.

3. מצאו את תחום ההתכנסות של הטורים הבאים, וקבעו האם ההתכנסות היא במ"ש:

(א) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \cdot n}$ (ב) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{1}{n} \cdot (x-2)^n$ (ג) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} x^{3n}$

פתרון:

(א) כאן $a_n = \frac{1}{2^n \cdot n}$. ממשפט דלאמבר (אפשר גם קושי־אדמר) רדיוס ההתכנסות הוא

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)}{2^n \cdot n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+2}{n} = 2$$

לכן מובטחת התכנסות אם $|x| < 2$ והתבדרות אם $|x| > 2$. נותר לבדוק את הקצוות:

$\underline{x = 2}$: נקבל את הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n \cdot n}$, זהו הטור ההרמוני שכידוע מתבדר.

$\underline{x = -2}$: נקבל את הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n \cdot n}$, הטור ההרמוני המתחלף, שהוא טור לייבניץ שמתכנס בתנאי.

מסקנה: תחום ההתכנסות הוא $\boldsymbol{[-2, 2)}$.

לפי משפט, ההתכנסות אינה במ"ש בתחום זה, אבל כן במ"ש בכל קטע סגור המוכל בתחום ההתכנסות.

(ב) תחילה נסמן $t = x - 2$ ונעבור לטור $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{1}{n} \cdot t^n$. כעת $a_n = \sin^2 \frac{1}{n}$. ממשפט דלאמבר:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin^2 \frac{1}{n}}{\sin^2 \frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}} \right)^{-2} \cdot \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$$

כשנעזרנו בגבול המוכר $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

כלומר אם $|t| < 1$ טור העזר מתכנס ואם $|t| > 1$ הוא מתבדר. נבדוק את הקצוות:

$\underline{t = 1}$: נקבל את הטור (החיובי) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{1}{n}$, שמתכנס לפי מבחן ההשוואה הגבולי עם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

$\underline{t = -1}$: נקבל את הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin^2 \frac{1}{n}$ שכפי שראינו מתכנס בהחלט.

לכן הטור מתכנס אם"ם $-1 \le t \le 1$, ז"א אם"ם $-1 \le x - 2 \le 1$, כלומר אם"ם $1 \le x \le 3$.

מסקנה: תחום ההתכנסות הוא $\boldsymbol{[1, 3]}$.

לפי משפט, ההתכנסות היא במ"ש בכל קטע סגור המוכל בתחום ההתכנסות, ובפרט ב־$[1, 3]$.

(ג) תחילה נסמן $t=x^3$ ונעבור לטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!}t^n$. כעת $a_n=\frac{(n!)^3}{(3n)!}$, ולפי משפט דלאמבר:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n!)^3}{(3n)!}}{\frac{[(n+1)!]^3}{(3n+3)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{(n+1)^3}=27$$

לכן טור העזר מתכנס עבור $|t|<27$ ומתבדר עבור $|t|>27$. אשר לקצוות:

$\underline{t=27}$: נקבל את הטור החיובי $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!}\cdot 27^n$ המקיים

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{27(n+1)^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}=\frac{(n+1)^3}{(n+\frac{1}{3})(n+\frac{2}{3})(n+1)}>1$$

לכן לא מתקיים תנאי הכרחי להתכנסות ($b_n\not\to 0$ כי זו סדרה מונוטונית עולה וחיובית) והטור מתבדר.

$\underline{t=-27}$: נקבל את הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n!)^3}{(3n)!}\cdot 27^n$. כמקודם, $\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|>1$ ולכן $|b_n|\not\to 0$ (סדרה מונוטונית עולה וחיובית), מכאן ש־$b_n\not\to 0$ ושוב נקבל התבדרות.

לכן הטור מתכנס אם"ם $|t|<27$, כלומר $|x^3|<27$, כלומר $-3<x<3$.

מסקנה: תחום ההתכנסות הוא $\boldsymbol{(-3,3)}$.

לפי משפט, ההתכנסות אינה במ"ש בתחום זה, אבל כן במ"ש בכל תת־קטע סגור של $(-3,3)$.

4. (א) מצאו את סכומי הטורים $\sum\limits_{n=0}^{\infty}nx^n$ ו־$\sum\limits_{n=0}^{\infty}n(n-1)x^n$ בתחום התכנסותם.

פתרון: קל לוודא שתחום ההתכנסות של שני הטורים הוא הקטע $(-1,1)$. זהו גם תחום ההתכנסות של הטור הגיאומטרי:

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$$

כיוון שזהו טור חזקות, בתחום זה ניתן לגזור איבר־איבר ולקבל:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x^n)'=\left(\frac{1}{1-x}\right)'\quad\Rightarrow\quad(*)\ \sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

לכן לכל $x\in(-1,1)$:

$$\boldsymbol{\sum_{n=0}^{\infty}nx^n}=x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\boldsymbol{\frac{x}{(1-x)^2}}$$

כעת, $(*)$ הוא טור הנגזרות של טור החזקות הגיאומטרי, לכן לפי משפט יש לו את אותו רדיוס התכנסות $R=1$. לכן בתחום $(-1,1)$ ניתן לגזור גם אותו איבר־איבר ולקבל

$$\sum_{n=1}^{\infty}(nx^{n-1})'=\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)'\quad\Rightarrow\quad\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=\frac{2}{(1-x)^3}$$

לכן לכל $x\in(-1,1)$:

$$\boldsymbol{\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)x^n}=x^2\cdot\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=\boldsymbol{\frac{2x^2}{(1-x)^3}}$$

(ב) היעזרו ב־(א) לחשב את סכום הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$.

פתרון: הטור הנ"ל מתקבל ע"י הצבת $x=\frac{1}{2}$ בטור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty}n^2x^n$. נשים לב:

$$\sum_{n=0}^{\infty}n^2x^n=\sum_{n=0}^{\infty}[n(n-1)+n]x^n$$

מסעיף (א) אנו יודעים שבתחום $(-1,1)$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[n(n-1)+n]x^n=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}nx^n=\frac{2x^2}{(1-x)^3}+\frac{x}{(1-x)^2}=\frac{x^2+x}{(1-x)^3}$$

לכן לכל $x\in(-1,1)$

$$\sum_{n=0}^{\infty}n^2x^n=\frac{x^2+x}{(1-x)^3}$$

ובפרט עבור $x=\frac{1}{2}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}=\left.\frac{x^2+x}{(1-x)^3}\right|_{x=\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{8}}=\mathbf{6}$$