

פונקציות מרוכבות תרגיל בית מס' 3

1. א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(z) = \log(z^2 + 1)$ כאשר \log מסמן את הענף העיקרי של הלוגריתם.
ב. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $\sqrt{\log(z+1)}$ כאשר \log מסמן את הענף העיקרי של הלוגריתם ו- $\sqrt{z} \mapsto z$ מסמן את הענף המתאים לארגומנט $0 < \text{Arg}(z) < 2\pi$.
2. חשבו: $(1+i)^i, (-i)^{-i}, \text{Re}((1-i)^{1+i})$.
3. א. הוכיחו את השוויונות: $\cos\left(\frac{1}{i} \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})\right) = z, \cot\left(\frac{1}{2i} \ln\left(\frac{z+i}{z-i}\right)\right) = z$
ב. פתרו את המשוואה $\sin z = 2$.
4. א. הוכיחו כי אם \log_{R_2}, \log_{R_1} הם שני ענפים של הלוגריתם המתאימים לתחומים היסודיים R_2, R_1 ואם z הוא מספר מרוכב הנמצא בתחום ההגדרה של שני הענפים האלו אז קיים k שלם כך ש- $\log_{R_1}(z) = \log_{R_2}(z) + 2\pi i k$
ב. הוכיחו כי אם z_1, z_2 הם שני מספרים מרוכבים המקיימים $-\frac{\pi}{2} < \text{Arg}(z_1), \text{Arg}(z_2) < \frac{\pi}{2}$ אז $\log(z_1 z_2) = \log(z_1) + \log(z_2)$ כאשר \log מסמן את הענף העיקרי של הלוגריתם.
5. נניח כי \log הוא הענף העיקרי של הלוגריתם ו- \log_R הוא הענף המתאים לארגומנט $0 < \text{Arg}(z) < 2\pi$ (כלומר R מסמן את התחום $0 < \text{Im}(z) < 2\pi$)
א. הוכיחו כי $\log(1/z) = -\log(z)$ לכל z בתחום ההגדרה של \log .
ב. תנו דוגמא למספר מרוכב z המקיים $\log_R(1/z) \neq -\log_R(z)$.
6. תהי $u(x, y) = e^x (x \cos y - y \sin y)$. מצא פונקציה הרמונית צמודה ל- u .
7. מצא את כל הפונקציות הרמוניות האפשריות מסוג $u(x, y) = \varphi(x^2 - y^2)$ במילים אחרות מצא את התבנית לפונקציה (ממשית) φ .