קבוצת קנטור

1. בטופולוגיה, קבוצה A תקרא מושלמת (Perfect set) אם ניתן להתקרב ככל שנרצה לכל $x \in A$ ע"י איברים מ A. במילים אחרות קבוצה היא מושלמת אם אין לה נקודות מבודדות.

א. הראו כי קבוצת קנטור C הינה מושלמת.

בטופולוגיה, קבוצה A תקרא דלילה (nowhere dense set) אם $Int\left(Cl\left(A\right)\right)=\varnothing$. במילים, A תקרא דלילה אם הפנים של הסגור של A הינה קבוצה ריקה.

ב. הראו כי קבוצת קנטור C אותה ראינו בתרגול הינה דלילה.

פתרון:

א. ראינו כי $x \in C$ אמ"מ ניתן לייצג אותו באופן הבא

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n} \qquad a_n \in \{0,2\}$$

ניקח את הסדרה הבאה:

$$\begin{aligned}
&x_1 = 0._3 a_1 \\
&x_2 = 0._3 a_1 a_2 \\
&\vdots \\
&x_k = 0._3 a_1 a_2 \ldots a_k \\
&\vdots
\end{aligned}$$

כאשר $0._3\ldots$ מסמל ייצוג טרינארי. ברור מהבנייה כי $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ומכאן של C אין נקודות מבודדות ו C קבוצה מושלמת.

ב. מכיוון שקבוצת קנטור סגורה (ראינו בתירגול) אז מספיק להראות כי היא לא מכילה קבוצה פתוחה (מלבד הקבוצה הריקה). מכיוון שאנו מדברים על קבוצה פתוחה ב $\mathbb{R}$ מספיק להראות כי היא איננה מכילה אף קטע פתוח(שהרי כל קבוצה פתוחה הינה איחוד זר ובן מנייה של קטעים פתוחים). כבר ראינו בתירגול כי קבוצת קנטור אינה מכילה קטעים פתוחים.

2. ראינו בתירגול שאם המידה של קבוצה סגורה (קבוצת קנטור למשל) הינה 0 אז היא איננה יכולה להכיל אף קטע פתוח. האם הכיוון השני נכון גם כן? האם קבוצה דלילה בהכרח תהיה בעלת מידה 0?

נבנה דוגמה נגדית. תהי $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ סדרה של מספרים ממשיים חיוביים כך ש $0<\sum_{k=1}^{\infty}2^{k-1}c_k<1$

בדומה לאופן בו בנינו את קבוצת קנטור C , נוריד ממרכז הקטע $[0,1]$ קטע באורך c_k על מנת לקבל את הקבוצה $\widehat{C}_1$. כעת נוריד ממרכז כל אחד משני הקטעים שנשארו קטעים באורך c_2 על מנת לקבל את הקבוצה $\widehat{C}_2$. בשלב ה k נוריד 2^{k-1} קטעים ממרכז כל אחד מהקטעים שנשארו מהשלב ה $k-1$ על מנת לקבל את הקבוצה $\widehat{C}_k$. נגדיר את $\widehat{C}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\widehat{C}_k$ להיות קבוצת קנטור המוכללת.

א. הראו כי $\widehat{C}$ קבוצת קנטור המוכללת הינה קומפקטית ומושלמת.

ב. הראו כי $\widehat{C}$ הינה דלילה.

ג. הראו כי $m\left(\widehat{C}\right)=1-\sum_{k=1}^{\infty}2^{k-1}c_k$.

רמז : השתמשו בעובדה כי מידה היא "רציפה". כלומר , אם $\{A_n\}$ סדרה של קבוצות כך ש $A_k\supseteq A_{k+1}$ ו $m(A_1)<\infty$ אזי $m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\lim_{n\to\infty}m(A_n)$.

פתרון:

א. מכיון שהקבוצה $\widehat{C}_k$ הינה איחוד סופי של קבוצות סגורות היא סגורה. $\widehat{C}$ סגורה כחיתוך של קבוצות סגורות . ברור כי $\widehat{C}$ חסומה ולכן קומפקטית. על מנת להראות כי הקבוצה מושלמת, נבחר $x\in\widehat{C}$. x שייך לכל $\widehat{C}_k$, ובפרט לאחד מהקטעים הסגורים שמרכיבים את $\widehat{C}_k$. נמספר קטעים אלו $A_k^{\ m}$ כאשר $1\le m\le 2^{k-1}$. בכל שלב x שייך רק לאחד מקטעים זרים אלו. נבנה סדרה $\{x_n\}$ שמתכנסת ל x. כל קטע $A_k^{\ m}$ המכיל את x הוא בעל קצוות שנמצאים בקבוצה $\widehat{C}_k$, כלומר $A_k^{\ m}=[a_k,b_k]$. נבחר $x_n=a_n$ ונראה כי

$|x_n-a_n|\le b_n-a_n=c_k$. מכיוון ש $\sum_{k=1}^{\infty}2^{k-1}c_k<1$ אזי נובע כי $c_k\to 0$ ומכאן ש $|x_n-a_n|\to 0$.

מכאן שאין ל $\widehat{C}$ נקודות מבודדות ולכן הקבוצה מושלמת.

ב. על מנת להראות כי $\widehat{C}$ הינה דלילה נראה כי היא איננה מכילה אף קטע פתוח. נראה זאת ע"י בניית סדרה הנמצאת במשלים של $\widehat{C}$ המתכנסת לאיבר שרירותי ב $\widehat{C}$.

יהי $x\in\widehat{C}$, נבנה את הסדרה $\{x_n\}$ באופן הבא. אם $x\in A_k^{\ m}$ ניקח את x_k להיות מרכז הקטע I_k אותו אנו מורידים בשלב ה k . ברור כי $x_k\in\widehat{C}^c$. נשים לב כי

$$|x_k-x|\le\frac{I_k}{2}+A_{k+1}^{\ m}=\frac{3c_{k+1}}{2}\to 0$$

מכאן כי $\widehat{C}$ דלילה.

ג. בשלב ה k אנו מורידים 2^{k-1} קטעים באורך c_k כל אחד. מכאן ש

ד. $1-\sum_{i=1}^{\infty} 2^{i-1} c_i \leftarrow 1-\sum_{i=1}^{k} 2^{i-1} c_i = m([0,1])-\sum_{i=1}^{k} 2^{i-1} c_i = m\left(\widehat{C}_k\right) \lim_{k\to\infty} = m\left(\widehat{C}\right)$. כאשר השיוויון תקף מרציפות המידה.