...

(כלומר T חסומה). ובכן, לכל f עם $\|f\|=1$ מתקיים $\max\limits_{0\leq x\leq 1}|f(x)|=1$ ולכן $|f(0)|\leq 1$ או $|T[f]|\leq 1$ או $\|T[f]\|_{\mathbb{R}}\leq 1$. מכאן שכל איברי הקבוצה $\{\|T[f]\|_{\mathbb{R}} | \|f\|_{\max}=1\}$ קטנים או שווים מ1, ומכאן

$$\|T\|=\sup\{\|T[f]\|_{\mathbb{R}} | \|f\|_{\max}=1\}\leq 1<\infty$$

ומכאן T חסומה.

נניח כעת כי מוגדרת על $C([0,1])$ נורמת L^2 ביחס למידת לבג $\|f\|_2=\left(\int_0^1|f|^2\,\mathrm{d}m\right)$ ויש להפריך את הרציפות של T. דרך מומלצת לעשות זאת היא ע"פ היינה: נמצא סדרה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ שמתכנסת לפונקציית האפס בנורמת L^2, ובכל זאת $T[f_n]\nrightarrow T[0]=0$ ב$\mathbb{R}$. ניקח סדרה כדלהלן:

$$f_n(x):=\begin{cases}1-nx & 0\leq x\leq\frac{1}{n}\\ 0 & \frac{1}{n}\leq x\leq 1\end{cases}$$

נחשב:

$$d(f_n,0)=\|f_n-0\|_2=\left(\int_0^1|f_n-0|^2\,\mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\int_0^{\frac{1}{n}}|f_n|^2\,\mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(\int_0^{\frac{1}{n}}|1-nx|^2\,\mathrm{d}m(x)\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\int_0^{\frac{1}{n}}\left(1-2n+n^2x^2\right)\,\mathrm{d}m(x)\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(x-nx^2+n^2\frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{x=\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3n}}\xrightarrow{n\to\infty}0\qquad\checkmark$$

לכל n $T[f_n]=f_n(0)=1$ ולכן $T[f_n]\overset{n\to\infty}{\nrightarrow}0$ - וזה מוכיח שT אינה רציפה.

תזכורת

יהי X מרחב וקטורי. מכפלה פנימית על X היא פונקציה $\langle\cdot,\cdot\rangle:X\times X\to\mathbb{R}(/\mathbb{C})$ המקיימת:

- **לינאריות ברכיב הראשון:** $\langle\alpha u+\beta v\rangle=\alpha\langle u,w\rangle+\beta\langle v,w\rangle$ $\forall_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}(/\mathbb{C})}\forall_{u,v,w\in X}$.
- **הרמיטיות:** לכל $u,v\in X$, $\langle v,u\rangle=\overline{\langle u,v\rangle}$ ב$\mathbb{C}$(ב$\mathbb{R}$ סימטריות $\langle v,u\rangle=\langle u,v\rangle$)
- **חיוביות:** $\langle v,v\rangle\geq 0$ ויש שוויון $\iff v=0$

נובע: אנטילינאריות ברכיב השני: $\langle u,\alpha v+\beta w\rangle=\overline{\alpha}\langle u,v\rangle+\overline{\beta}\langle u,w\rangle$(ב$\mathbb{R}$ יש לינאריות גם ברכיב השני).

תרגיל

הוכיחו כי $\langle A,B\rangle := \mathrm{Trace}\left(AB^*\right)$ מהווה מכפלה פנימית על מרחב המטריצות המרוכבות $\mathbb{C}^{m\times n}$(כזכור $B^*=\overline{B^t}$).

פתרון

נוכיח את התנאים:

- $$\langle \alpha A+\beta B,C\rangle = \mathrm{Trace}\left(\left(\alpha A+\beta B\right)C^*\right) = \mathrm{Trace}\left(\alpha AC^*+\beta BC^*\right) =$$
$$= \mathrm{Trace}\left(\alpha AC^*\right)+\mathrm{Trace}\left(\beta BC^*\right) = \alpha\mathrm{Trace}\left(AC^*\right)+\beta\mathrm{Trace}\left(BC^*\right) = \alpha\langle A,C\rangle+\beta\langle B,C\rangle$$

- $$\langle B,A\rangle = \mathrm{Trace}\left(BA^*\right) = \mathrm{Trace}\left(\left(BA^*\right)^t\right) = \mathrm{Trace}\left({A^*}^t B^t\right) = \mathrm{Trace}\left(\overline{A}B^t\right) =$$
$$= \mathrm{Trace}\left(\overline{A\overline{B^t}}\right) = \overline{\mathrm{Trace}\left(A\overline{B^t}\right)} = \overline{\mathrm{Trace}\left(AB^*\right)} = \overline{\langle A,B\rangle}$$

- $$\langle A,A\rangle = \mathrm{Trace}\left(AA^*\right) = \sum_{k=1}^{m}\left(AA^*\right)_{kk} = \sum_{k=1}^{m}R_k\left(A\right)\cdot C_k\left(\overline{A}^t\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{m}R_k\left(A\right)\cdot R_k\left(\overline{A}\right) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}a_{kl}\cdot\overline{a_{kl}} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\left|a_{kl}\right|^2 \geq 0$$
ויש שוויון אם ורק אם כל איברי המטריצה $\{a_{kl}\}$ הם 0.

תרגיל

הראו כי נורמת המקסימום במרחב $C\left([a,b]\right)$ אינה מושרית משום מכפלה פנימית.

פתרון

נפריך את זהות המקבילית $\|f+g\|^2+\|f-g\|^2 = 2\left(\|f\|^2+\|g\|^2\right)$. בהרצאה הוכח שאם הנורמה מושרית ע"י מכפלה פנימית, אזי זהות המקבילית חייבת להתקיים.

נבחר את f להיות הקטע מ$(a,1)$ ל$\left(\frac{a+b}{2},0\right)$ ומשם ל$(b,0)$, ואת g להיות הקטע מ$(a,0)$ ל$\left(\frac{a+b}{2},0\right)$ ומשם ל$(b,1)$.

$$\|f\| = \max_{a\leq x\leq b} |f(x)| = |f(a)| = 1$$

$$\|g\| = 1$$

$$\|f+g\| = 1$$

$$\|f-g\| = 1$$

נציב בזהות המקבילית:

$$1^2 + 1^2 = 2\cdot\left(1^2+1^2\right)$$

$$2 = 4$$

סתירה!

נגזרת רדון־ניקודים

בהרצאה הוכחנו שאם $f \geq 0$ מדידה בממ"ח (X,S,μ) אזי $\nu(E) := \int_E f\,\mathrm{d}\mu$ (כאשר $E \in S$) מגדירה מידה חדשה, ובנוסף $\mu(E) = 0 \implies \nu(E) = 0$. נאמר ש$\nu$ רציפה בהחלט ביחס לμ ונסמן $\nu \ll \mu$.

בתרגיל בית 6 הוכחנו בנוסף את השוויון $\int_X gf\,\mathrm{d}\mu = \int_X g\,\mathrm{d}\nu$, מה שמפתה לומר $f = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$.

f נקראת נגזרת רדון־ניקודים של ν ביחס לμ. משפט רדון־ניקודים אומר שאם μ,ν מידות σ־סופיות על אותו מ"מ (X,S) ומקיימות $\nu \ll \mu$ (כלומר $\mu(E) = 0 \implies \nu(E) = 0$) אזי קיימת נגזרת רדון־ניקודים $f = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$.

תרגיל

יהי (X,S) מרחב מ"מ ותהיינה μ,ν,λ מידות σ־סופיות עליו המקיימות $\begin{matrix}\mu \ll \lambda\\ \nu \ll \lambda\end{matrix}$, אזי קיימת נגזרת רדון־ניקודים $\frac{\mathrm{d}(\mu+\nu)}{\mathrm{d}\lambda}$, ומתקיים $\frac{\mathrm{d}(\mu+\nu)}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda} + \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\lambda}$.

פתרון

ניתן ליישם את משפט רדון־ניקודים על היחסים $\begin{matrix}\mu \ll \lambda\\ \nu \ll \lambda\end{matrix}$ ולקבל שקיימות $f = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda}, g = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\lambda}$ ומדידות כך ש

$$\mu(E) = \int_E f\,\mathrm{d}\lambda \qquad \nu(E) = \int_E g\,\mathrm{d}\lambda$$

לכל E מדידה. מכאן:

$$(\mu+\nu)(E)=\mu(E)+\nu(E)=\int_E f\,\mathrm{d}\lambda+\int_E g\,\mathrm{d}\lambda=\int_E (f+g)\,\mathrm{d}\lambda=\int_E\left(\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda}+\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\lambda}\right)\mathrm{d}\lambda=\frac{\mathrm{d}(\mu+\nu)}{\mathrm{d}\lambda}$$

נסיים את הקורס בהערה:

ניתן להוכיח בנוסף עוד זהויות יפות, כמו כלל השרשרת(בתנאי ש $\begin{matrix}\nu\ll\lambda\\ \nu\ll\mu\\ \mu\ll\lambda\end{matrix}$):

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}\cdot\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda}$$

וגם ש(בתנאי ש$\mu\ll\nu\ll\mu$):

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}=\left(\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}\right)^{-1}$$