shiragilat@live.biu.ac.il

בס"ד

תרגול 1
29/02/16

דוגמא: אם G חבורה חילופית (אבלית)

$End(G)=\{f:G\to G \text{ הומו}\}$

זהו חוג ביחס לחיבור והרכבה.

תזכורות:

· איבר הפיך מימין $x\square=1$, הפיך משמאל $\square x=1$ והפיך.

· חוג שבו כל איבר הוא הפיך נקרא חוג עם חילוק.

דוגמא: נניח V מ"ו ממימד אינסופי $\aleph_0$ ונסתכל על החוג $End(V)$ ונגדיר האופרטורים:

$\sigma(a_1, a_2,\dots)=(0,a_1,\dots)$

$S(a_1,a_2,\dots)=(a_2,\dots)$

$S\circ T=1$ T הפיך משמאל, S הפיך מימין.

אך T ו-S לא הפיכים.

תרגיל: יהי R חוג $a\in R$ הפיך מימין ולא הפיך משמאל הוכח של a יש ∞ הפיכים מימין.

פתרון:

a הפיך מימין ולכן קיים $b\in R$ כך ש $ab=1$ ונגדיר בעזרתו:

$i\in\mathbb{N}$ $b_i=(1-ba)a^i+b$

נראה ש-b_i הופכי מימין ל-a:

$ab_i=a[(1-ba)a^i+b]=\cancel{a^{i+1}}-\cancel{aba^{i+1}}+ab=ab=1$

נראה ש-b_i שונים אחד מהשני: נניח בשלילה שקיים $i<j$ $b_i=b_j$

$(1-ba)a^i+\cancel{b}=(1-ba)a^j+\cancel{b}$

$(1-ba)a^i=(1-ba)a^j \quad /\cdot b^i$ מימין

$(1-ba)\underbrace{a^ib^i}_{1}=(1-ba)=a^{j-i}$

$1=((1-b)a^{j-i-1}+b)a$

לכן a הפיך משמאל - סתירה!

מסקנה: אם R חוג סופי אז כל איבר הפיך מימין הוא הפיך.

לשדה

דוגמא: $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2} \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$

הוא שדה (כלומר חוג + חילוק קומוטטיבית).

הוכחה: חוג ✓

קומוטטיבי ✓.

הפיכות: ניקח איבר $a+b\sqrt{2}\neq 0$ ונמצא לו איבר הופכי:

$$\frac{1}{a+b\sqrt{2}}\cdot\frac{a-b\sqrt{2}}{a-b\sqrt{2}}=\frac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2}=\frac{a}{a^2-2b^2}-\frac{b}{a^2-2b^2}\sqrt{2}$$

נשים לב – $a^2-2b^2\neq 0$ כי $a\pm b\sqrt{2}\neq 0$

דוגמא: $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2} \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$

זהו חוג, לא שדה אך ישנם איברים הפיכים?

הוכחה: כאן לא שדה כי למשל 3 לא הפיך. מתי איבר ב- $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ הוא הפיך?

(נשתמש בנוסחה מקודם שעבדה ב- $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]\subset\mathbb{Q}(\sqrt{2})$) צריך ש- $a^2-2b^2=\pm1$

אז ההופכי נמצא ב- $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

דוגמא: $a=3,\ b=2$ אז – $x=3+2\sqrt{2}$ הוא הפיך וגם x^n ל- $k\in\mathbb{N}$

דוגמא: חוג עם חילוק לא קומוטטיבי – קווטרניונים

$$\mathbb{H}=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ \bar{b} & \bar{a}\end{pmatrix} \,\middle|\, a,b\in\mathbb{C}\right\}\subseteq M_2(\mathbb{C})$$

נוכיח חוג

כל איבר $\neq 0$ הוא הפיך (וההופכי שלו גם ב- H)

סימון: $1=\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix}$ $\quad i=\begin{pmatrix}i & \\ & -i\end{pmatrix}$

$j=\begin{pmatrix} & -1\\ 1 & \end{pmatrix}$ $\quad k=\begin{pmatrix} & -i\\ -i & \end{pmatrix}$ אזי $H=\mathrm{span}\{1,i,j,k\}$

וגם $ij=-ji=k$

סימון: יהי חוג R מסמנים ב- $R^\times$ את כל ההפיכים ב- R זה לא חוג!

אך $1,-1\in R^\times$ לא נכון תמיד שהסכום (כי x,y הפיכים $\not\Rightarrow$ $x+y$ הפיך)

תרגיל: אם R קומוטטיבי $x,y\in R$ ו-xy הפיך אזי y,x הפיכים
פתרון: $x^{-1}=y(xy)^{-1}$
$y^{-1}=(xy)^{-1}x$

דוגמה נגדית למקרה הלא קומוטטיבי: V ממ"ד אינסופי $T,S\in End(V)$ כך ש
המרכבה $ST=1$ הפיכה אבל T,S לא הפיכות.

תרגיל: יהי R חוג ונניח שכל איבר $0\neq a\in R$ הפיך משמאל. צ"ל R חוג עם חילוק.
פתרון: ניקח $a\neq 0$ לפי ההנחה יש לו הופכי משמאל $xa=1$ כאשר $x\in R$
גם לו קיים הופכי משמאל $yx=1$ $y\in R$
אז $y\cdot 1 = yxa$
$\underset{1}{yx}a=y$ ⇐ $a=y$ כלומר $ax=1$ ⇐ $x=a^{-1}$

הגדרה- יהי R חוג. אז איברים $0\neq a,b\in R$ מקיימים $ab=0$ אז
a נקרא מחלק אפס משמאל
b נקרא מחלק אפס מימין
הגדרה- חוג שאין בו מחלקי אפס נקרא תחום.
תחום קומוטטיבי נקרא תחום שלמות.

דוגמאות: תחום- $\mathbb{Z}$, $2\mathbb{Z}$, שדה.
לא תחום- $M_n(F)$, $\mathbb{Z}_6$ - $2\cdot 3=0$

הערה:
איבר הפיך (מימין/משמאל) הוא אף פעם לא מחלק אפס לכן כל חוג עם חילוק הוא תחום.

תרגיל:
חוג סופי כל איבר $\neq 0$ הוא או הפיך או מחלק אפס.

פתרון: ניקח $0\neq a\in R$ ונניח שהוא לא הפיך.
נסתכל על $ab_1, ab_2, \dots ab_n$ כאשר b_i אברי החוג.
$ab_i\neq 1$ לכל i לפי ההנחה.

המשך

ולכן (לא שייך (מינ"ס) יש n איברים :- n [illegible] ומשתמשים $a(b_i-b_j)=0$

$ab_i=ab_j$

לכן a מחלק אפס.

מסקנה: תחום סופי הוא חוג עם חילוק
תחום שלמות סופי הוא שדה.

תת חוג-

הגדרה- $S\subseteq R$ תת-חוג אם הוא חוג ($1_R\in S$ אופציונלי).

דוגמאות: $n\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$ $n\mathbb{Z}$ תת חוג בלי יחידה של ϕ.

קריטריון לתת חוג-

קריטריון: $S\subseteq R$ תת חוג אם:
- $S\neq\phi$
- סגירות לחיסור $a,b\in S\Rightarrow a-b\in S$
- סגירות לכפל
- $1_R\in S$

הגדרה- יהי R חוג. המרכז של R הוא:

$$Z(R)=\{x\in R\mid \forall y\in R,\ xy=yx\}$$

המרכז של R הוא:

$$C_R(S)=\{x\in R\mid \forall s\in S: xs=sx\}$$

טענה: $C_R(S)$ הוא תת חוג.

טענות:

(1) אם R קומוטטיבי $C_R(S)=R$.

(2) R קומוטטיבי $\Leftrightarrow$ $Z(R)=R$

(3) אם $A\subseteq B$ אז $C_R(A)\supseteq C_R(B)$.

(4) $S\subseteq C_R(C_R(S))$

הוכחה: יהי $s\in S$ וניקח $x\in C_R(S)$ נרצה להוכיח $xs=sx$ וזה נכון הגדרה.

(5) $C_R(S)=C_R(C_R(C_R(S)))$

<u>הוכחה</u> (ב) נסמן $X=C_R(S)$ אזי $X\subseteq C_R(C_R(X))$ לפי (4)
(ג) לפי 3+4

<u>תכונות עולה/יורדת מעל חוג</u> $S\subseteq R$

	יורד?	עולה
קומוטטיביות	כן	לא
איבר הפיך	לא ($\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}$ שהפיך [illegible])	כן
ללא מחלקי אפס	כן	לא $\mathbb{H}\subseteq M_2(\mathbb{C})$
אידמפוטנט 0	לא $\begin{pmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\subseteq M_2(F)$	כן
שדה	כן	לא $\begin{pmatrix} x & \cdot \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\subseteq M_2(F)$