פתרון תרגיל לעבודה עצמית 11

שאלה 1

בספינה נמצאו 20 ילדים. הילדים לא זוכרים את יום הולדתם ומעוניינים לקבל יום – הולדת (מתוך 365 תאריכים אפשריים בשנה)

i. מה מספר האפשרויות לחלק להם יום הולדת כך שבדיוק שני ילדים יקבלו יום זהה ו – 18 ילדים יקבלו כל אחד יום הולדת משלו (נפרד)? פתרו ונמקו.

ii. מה מספר האפשרויות לחלק להם ימי הולדת כך שיהיה לפחות יום אחד בשנה שאותו יחגגו לפחות שני ילדים? פתרו ונמקו.
(רמז: מה מספר האפשרויות שלא יהיה יום הולדת משותף?)

פתרון

i. יש $\binom{20}{2}$ אפשרויות לבחירת הזוג שיקבל את יום ההולדת באותו היום.
אחרי קביעת הילדים שיקבלו את יום ההולדת באותו יום יש לבחור 19 ימים מתוך 365 ימים כאשר הסדר משנה ז"א יש $\frac{365!}{346!}$ אפשרויות לבחירת הימים.
סה"כ מספר האפשרויות הוא $\binom{20}{2}\cdot\frac{365!}{346!}$.

ii. מספר האפשרויות הכולל הוא – לכל ילד יש 365 אפשרויות ולכן 365^{20}.
מספר האפשרויות שלכל הילדים יהיו ימי הולדת שונים הוא $\frac{365!}{345!}$.
סה"כ האפשרויות $365^{20}-\frac{365!}{345!}$

שאלה 2

במכללה כלשהי לומדים לתואר במדעי המחשב במשך ארבע שנים.

א. בכמה דרכים אפשר לבחור ועד של 10 תלמידים לייצג את תלמידי מדעי המחשב, כאשר מה שחשוב הוא כמה נציגים נבחר מכל מחזור ולא אלו תלמידים נבחרו?

ב. בכמה דרכים אפשר לבחור את הוועד כך שייבחר לפחות תלמיד אחד משנה א, לפחות תלמיד אחד משנה ב, לפחות שני תלמידים משנה ג ולפחות שני תלמידים משנה ד?

פתרון

א. עלינו למצוא את מספר הפתרונות השלמים האי שליליים למשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4=10$. ראינו בשיעור שמספר האפשרויות לפתרון המשוואה $\sum_{i=1}^{n}x_i=k$ כאשר $x_i\ge 0$ הוא $\binom{n+k-1}{n-1}$ ולכן התשובה היא $286=\binom{13}{9}$.

ב. במקרה זה צריך להתקיים $x_1+x_2+x_3+x_4=10$ כאשר $x_1\ge 1, x_2\ge 1, x_3\ge 2, x_4\ge 2$.
נגדיר משתנים חדשים $y_1=x_1+1; y_2=x_2+1; y_3=x_3+2; y_4=x_4+2$.

מספר האפשרויות לבחור את הוועד שווה למספר הפתרונות השלמים והאי שליליים למשוואה
$y_1+y_2+y_3+y_4=4$. $\binom{7}{4}=35$.

<u>שאלה 3</u>

מתוך קבוצה של 6 גברים ו 9 נשים בוחרים ועד המונה 5 אנשים. אם הבחירה אקראית, מהי ההסתברות שהוועד יורכב מ 3 גברים ו 2 נשים?

<u>פתרון</u>

מספר האפשרויות לבחור חמישה אנשים הוא $\binom{15}{5}$.

מספר האפשרויות לבחור שלושה גברים מתוך שישה גברים הוא $\binom{6}{3}$.

מספר האפשרויות לבחור שתי נשים מתוך תשע הוא $\binom{9}{2}$.

ההסתברות המבוקשת היא $\frac{\binom{6}{3}\cdot\binom{9}{2}}{\binom{15}{5}}=\frac{240}{1001}$.

<u>שאלה 4</u>

A ו B שני מאורעות בניסוי מקרי. נתון $P(A)=0.6, P(B)=0.9$.

א. מצא באיזה תחום מספרים נמצא $P(A\cup B)$.

ב. מצא באיזה תחום מספרים נמצא $P(A\cap B)$.

ג. מצא באיזה תחום מספרים נמצא $P(\overline{A}\cap B)$.

ד. האם ייתכן שהמאורעות $P(A),P(B)$ בלתי תלויים? נמק!

<u>פתרון</u>

א1. מכיוון ש $B\subseteq A\cup B$ נקבל ש $P(B)\le P(A\cup B)\Leftarrow 0.9\le P(A\cup B)$ הסתברות לא יכולה להיות גדולה מ 1 ולכן $0.9\le P(A\cup B)\le 1$.

א2. $A\cap B\subseteq A \Leftarrow P(A\cap B)\le P(A)\Leftarrow P(A\cap B)\le 0.6$

מכיוון ש $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftarrow 1\le 0.6+0.9-P(A\cap B) \Leftarrow 0.5\le P(A\cap B)$

סה"כ נקבל ש $0.5\le P(A\cap B)\le 0.6$.

א3. נתון ש $P(A)=0.6$ ולכן $P(\overline{A})=0.4$. מכיוון ש $\overline{A}\cap B\subseteq\overline{A}\Leftarrow P(\overline{A}\cap B)\le 0.4$

$P(\overline{A}\cup B)=P(\overline{A})+P(B)-P(\overline{A}\cap B)\Leftarrow 1\le 0.4+0.9-P(\overline{A}\cap B)\Leftarrow 0.3\le P(\overline{A}\cap B)$

סה"כ נקבל ש $0.3\le P(\overline{A}\cap B)\le 0.4$.

4א. כדי שהמאורעות יהיו בלתי תלויים צריך להתקיים $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$
מכיוון ש $P(A)\cdot P(B)=0.54$ והראינו ש $0.5\le P(A\cap B)\le 0.6$ אז ייתכן שהמאורעות $P(A),P(B)$ הן בלתי תלויים.

<u>שאלה 5</u>

A ו B שני מאורעות בניסוי מקרי. נתון $P(A)=k, P(B)=m$.

מצא באיזה תחום מספרים נמצא $P(A\cap B)$. היעזר בפרמטרים k,m במידת הצורך.

<u>פתרון</u>

מכיוון ש $A\cap B\subseteq A, A\cap B\subseteq B \Leftarrow P(A\cap B)\le P(A), P(A\cap B)\le P(A)$
ולכן חייב להתקיים $P(A\cap B)\le \min\{k,m\}$.
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Leftarrow k+m-P(A\cap B)\le 1 \Leftarrow k+m-1\le P(A\cap B)$
הסתברות לא יכולה להיות שלילית ולכן $0\le P(A\cap B)$.
סה"כ נקבל ש $\max\{0,k+m-1\}\le P(A\cap B)\le \min\{k,m\}$.

<u>שאלה 6</u>

במדגם בחירות, מחצית מהמשתתפים היו צעירים והיתר מבוגרים. שליש מהבוחרים הצביעו למפלגות השמאל, שליש הצביעו למפלגות המרכז, והיתר הצביעו למפלגות הימין. נגדיר את המאורעות:

- המאורע A הוא: "להיות צעיר"
- המאורע B הוא: "להצביע למפלגות הימין".
- המאורע C הוא: "להצביע למפלגות המרכז".

נתון: המאורעות A ו C תלויים זה בזה.

א. מצא את תחום הערכים האפשרי של ההסתברות: $P(A\cap C)$.

ב. נתון: המאורעות A ו B בלתי תלויים זה בזה, $P(\overline{A}\cap C)=2\cdot P(A\cap C)$.
חשב את ההסתברות לבחור צעיר מבין מצביעי השמאל.

<u>פתרון</u>

א. נתון ש $P(A)=\frac{1}{2} \Leftarrow P(\overline{A})=\frac{1}{2}$, $P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$. מכיוון שהמאורעות A ו B בלתי תלויים נקבל ש $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B) \Leftarrow P(A\cap B)=\frac{1}{6}$.

מכיוון שהמאורעות A ו C תלויים נקבל ש $P(A\cap C)\ne P(A)\cdot P(C) \Leftarrow P(A\cap C)\ne \frac{1}{6}$.

מכיוון ש $A\cap C\subseteq A, A\cap C\subseteq C$ נקבל ש
$P(A\cap C)\le P(A), P(A\cap C)\le P(C) \Leftarrow P(A\cap C)\le \frac{1}{3}$.

סה"כ תחום הערכים הוא: $\frac{1}{6}<P(A\cap C)\le\frac{1}{3} \vee 0\le P(A\cap C)<\frac{1}{6}$.

ב. מכיוון שהמאורעות A ו B בלתי תלויים נקבל ש $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B) \Leftarrow P(A\cap B)=\frac{1}{6}$.

$P(A \cap C) + P(\overline{A} \cap C) = P(C) \Leftarrow P(A \cap C) + P(\overline{A} \cap C) = \frac{1}{3}$.

נתון ש $P(\overline{A} \cap C) = 2 \cdot P(A \cap C)$ ואז $P(A \cap C) + 2 \cdot P(A \cap C) = \frac{1}{3}$ ז"א $P(A \cap C) = \frac{1}{9}$.

נגדיר את המאורע D להיות: "להצביע למפלגת השמאל" ואז

$P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(A \cap D) = \frac{1}{2} \Leftarrow P(A \cap C) + P(A \cap D) = \frac{1}{3} \Leftarrow P(A \cap D) = \frac{2}{9}$.

ביקשו לחשב את $P(A/D)$. $P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{1} = \frac{2}{3}$.