פתרון תרגיל בית 1 בהסתברות וסטטיסטיקה מתמטית
88-373 סמסטר ב' תשפ"א

תרגיל 1. יהי $(\Omega,\mathcal{F})$ מרחב מדיד, ותהי $A\subseteq\Omega$. הוכיחו כי $\mathcal{G}=\{B\cap A\mid B\in\mathcal{F}\}$ היא σ-אלגברה על A.

פתרון. נבדוק את ההגדרה.

א. $\varnothing\in\mathcal{G}$ כי $\varnothing=\varnothing\cap A$.

ב. נניח ש-$C\in\mathcal{G}$. אז קיימת $B\in\mathcal{F}$ כך ש-$C=B\cap A$. לכן $A\setminus C=(\Omega\setminus B)\cap A\in\mathcal{G}$.

ג. יהיו $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{G}$. לפי הגדרת $\mathcal{G}$, לכל n קיימת $B_n\in\mathcal{F}$ כך ש-$C_n=B_n\cap A$. לכן

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}(B_n\cap A)=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)\cap A\in\mathcal{G}.$$

תרגיל 2. תהי $\mathcal{F}_1\subseteq\mathcal{F}_2\subseteq\cdots$ שרשרת של σ-אלגברות על קבוצה Ω. הוכיחו או הפריכו: $\mathcal{F}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_n$ היא σ-אלגברה.

פתרון. נראה כי הטענה אינה נכונה. אכן, קל לראות ששתי התכונות הראשונות מתקיימות, ודוגמה נגדית חייבת לבוא מהדרישה על איחוד בן-מנייה.

ניקח $\Omega=\mathbb{N}$, ונגדיר $\mathcal{F}_n=\sigma\left(\{\{1\},\ldots,\{n\}\}\right)$. זו ה-$\sigma$-אלגברה הנוצרת על ידי הקבוצות $\{1\},\ldots,\{n\}$, כלומר מכילה את כל תת-הקבוצות של $\{1,\ldots,n\}$ ואת כל המשלימים שלהם. בבירור מתקיימת הכלה $\mathcal{F}_1\subseteq\mathcal{F}_2\subseteq\cdots$. נסתכל על האיחוד שלהן $\mathcal{F}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_n$; $A\in\mathcal{F}$ אם ורק אם A סופית או A^c סופית. לכל $n\in\mathbb{N}$, $\{2n\}\in\mathcal{F}$; אך $\bigcup_{n=1}^{\infty}\{2n\}=2\mathbb{N}\notin\mathcal{F}$.

תרגיל 3. יהיו $\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2$ שתי σ-אלגברות על קבוצה Ω. הוכיחו: אם $\mathcal{F}_1\cup\mathcal{F}_2$ היא אלגברה, אז היא σ-אלגברה.

הוכחה. נסמן $\mathcal{F}=\mathcal{F}_1\cup\mathcal{F}_2$. ברור ש-$\varnothing\in\mathcal{F}$ וש-$\mathcal{F}$ סגורה למשלימים. נוכיח ש-$\mathcal{F}$ סגורה תחת איחוד בן-מנייה. אכן, יהיו $A_1,A_2,\dots\in\mathcal{F}$. אזי

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\underbrace{\left(\bigcup_{n:A_n\in\mathcal{F}_1}A_n\right)}_{\in\mathcal{F}_1}\cup\underbrace{\left(\bigcup_{n:A_n\in\mathcal{F}_2}A_n\right)}_{\mathcal{F}_2}\in\mathcal{F}_1\cup\mathcal{F}_2.$$

השייכות האחרונה נכונה בגלל הסגירות לאיחודים סופיים. □

תרגיל 4. יהי $(\Omega, \mathcal{F})$ מרחב מדיד, ותהי $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ פונקציה עליו. נניח ש-P מקיימת:

א. P אדיטיבית סופית.

ב. $P(\Omega) = 1$.

ג. אם $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה עולה של מאורעות, אז $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$ (במילים, P רציפה מלמטה).

הראו כי P היא σ-אדיטיבית, והסיקו כי P היא מידת הסתברות על $(\Omega, \mathcal{F})$.

הוכחה. יהיו $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ מאורעות זרים בזוגות. נגדיר $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. B_n היא סדרה עולה של מאורעות, ולכן

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(B_n).$$

מצד שני, כיוון ש-P אדיטיבית סופית,

$$P(B_n) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k),$$

ובסך הכל נסיק

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

לכן P מידת הסתברות. □

תרגיל 5. בתרגיל זה ננסה להגדיר התפלגות "אחידה" על הטבעיים, וניכשל. עבור קבוצה $A \subseteq \mathbb{N}$ נגדיר את **צפיפות צזארו (Césaro)** שלה להיות

$$\rho(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap \{1, \ldots, n\}|}{n}$$

אם הגבול מוגדר. נסמן על ידי CES את אוסף תת-הקבוצות של $\mathbb{N}$ שקיימת להן צפיפות צזארו. הוכיחו כי CES אינה σ-אלגברה, ולמעשה – אפילו אינה אלגברה.

הוכחה. נסתכל על $A_1 = 2\mathbb{N}$ (כמובן $A_1 \in \mathrm{CES}$ עם $\rho(A_1) = \frac{1}{2}$), ונבנה $A_2 = \{a_1, a_2, \ldots\} \subseteq \mathbb{N}$ שתקיים:

- לכל n, $a_n \in \{2n-1, 2n\}$. בפרט $\rho(A_2) = \frac{1}{2}$ ולכן $A_2 \in \mathrm{CES}$.
- $A_1 \cap A_2 \notin \mathrm{CES}$.

הרעיון: נדאג שהסדרה $b_n = \frac{|A_1 \cap A_2 \cap \{1,\ldots,n\}|}{n}$ "תתנדנד" בין 0 ל-$\frac{1}{2}$. אם $2^k \leq n < 2^{k+1}$, ניקח את a_n להיות עם אותה הזוגיות כמו של k. נחשב את b_{2^k}. אם k זוגי,

$$b_{2^k} = \frac{\left|A_1 \cap A_2 \cap \left\{1, 2, \ldots, 2^k\right\}\right|}{2^k} = \frac{1}{2} b_{2^{k-1}}.$$

אם k אי-זוגי,

$$.b_{2^k} = \frac{\left|A_1 \cap A_2 \cap \left\{1,2,\ldots,2^k\right\}\right|}{2^k} = \frac{1}{2} b_{2^{k-1}} + \frac{1}{4}$$

נקבל את נוסחת הנסיגה

$$.b_{2^{k+2}} = \begin{cases} \frac{1}{4} b_{2^k} + \frac{1}{8}, & \text{זוגי } k \\ \frac{1}{4} b_{2^k} + \frac{1}{4}, & \text{אי-זוגי } k \end{cases}$$

על ידי שימוש בכלי הקסם "אינפי 1", אפשר לראות ש-$\frac{1}{6} \to b_{2^{2k}}$ ואילו $.b_{2^{2k-1}} \to \frac{1}{3}$. לכן הגבול של b_n אינו קיים. $\square$

תרגיל 6. (מקור השם "אלגברה" של קבוצות).

א. קראו בוויקיפדיה את הגדרת המושג אלגברה מעל שדה (בקישור הזה; לצורך התרגיל מספיק לקרוא רק את ההגדרה של אלגברה).

ב. השתכנעו ש-$(P(\Omega), \Delta, \cap)$ היא אלגברה מעל השדה $\mathbb{Z}_2$. (צריך לוודא ש-$P(\Omega)$ עם הפעולות הנ"ל הוא חוג, להגדיר כפל בסקלר מ-$\mathbb{Z}_2$ כך ש-$P(\Omega)$ יהיה מרחב וקטורי מעל $\mathbb{Z}_2$, ולוודא ש-$\alpha(xy) = (\alpha x) y = x(\alpha y)$ לכל $\alpha \in \mathbb{Z}_2$ ו-$x, y \in P(\Omega)$).

ג. הסבירו מדוע אלגברה של קבוצות על Ω כפי שהגדרנו אותה היא למעשה תת-אלגברה של $(P(\Omega), \Delta, \cap)$ מעל השדה $\mathbb{Z}_2$ (באלגברה זו איבר האפס הוא $\varnothing$, ואיבר היחידה הוא Ω).

ד. העמידו פני מופתעים.

הוכחה.

א. קראתי!

ב. נוודא כי מדובר בחוג. ודאי שיש אסוציאטיביות ביחס לשתי הפעולות; איבר היחידה החיבורי הוא $\varnothing$; האיבר הנגדי של $A \subseteq \Omega$ הוא A; החיבור קומוטטיבי; ואיבר היחידה הכפלי הוא Ω. הפילוג מתקיים כי

ג. תהי $\mathcal{F}$ אלגברה מעל Ω. כדי להוכיח ש-$\mathcal{F}$ תת-אלגברה של $P(\Omega)$ עם הפעולות הנ"ל, נרצה להראות ש-$\mathcal{F}$ היא תת-חוג של $P(\Omega)$ (בגלל הפעולה של $\mathbb{Z}_2$, כל תת-חבורה חיבורית היא גם תת-מרחב וקטורי).
אכן, תהיינה $A, B \in \mathcal{F}$. נשים לב שהחיסור ב-$P(\Omega)$ הינו $A \Delta B$ (כי $B \Delta (A \Delta B) =$ A). אבל $A \Delta B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$, ואגף ימין נמצא ב-$\mathcal{F}$ כי כל אחת מהקבוצות בו נמצאת ב-$\mathcal{F}$.
סגירות לכפל נובעת ישירות מהסגירות לחיתוך סופי של $\mathcal{F}$.

 ד.

☐