תרגילים 4-5

1. (משפט לוסין) תהי $f=1_A$ פונקצית דריכלה בקטע $[0,1]$, כלומר, $A=[0,1]\setminus\mathbb{Q}$. הוכיחו כי לכל $\varepsilon>0$ קיימת קבוצה סגורה F (מצאו את F ממש) בקטע $[0,1]$ כך שהצמצום של f על F הינה פונקציה רציפה ומתקיים $m([0,1]\setminus F)<\varepsilon$.

פתרון: נגדיר את סדרת הרציונאליים ב $\mathbb{R}$ $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ונגדיר את הקטע $I_i=\left(q_i-\varepsilon 2^{-i-1},q+\varepsilon 2^{-i-1}\right)$, ברור כי $m(I_i)=\varepsilon 2^{-i}$ וכי $m\left(\bigcup_i I_i\right)\le\sum_i m(I_i)=\varepsilon$. נגדיר את $F=[0,1]\setminus\bigcup_i I_i$ ונשים לב כי, כי הקבוצה F סגורה ואינה מכילה ראציונליים ומכיוון ש $m(F)=m\left([0,1]\setminus\bigcup_i I_i\right)>1-\varepsilon$ נובע ש $m([0,1]\setminus F)<\varepsilon$. בנוסף הצמצום של f על F הינה פונקציה קבועה ולכן רציפה. מכאן ש F הינה הפונקציה הנדרשת.

2. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ פונקציה אינטגרבילית, הוכיחו: $\lim_{h\to0}\int_{\mathbb{R}}\left|f(x-h)-f(x)\right|dm=0$.

רמז: העזרו בקירוב של פונקציות רציפות.

פתרון: אנו יודעים כי מכיוון ש f אינטגרבילית אז לכל $\varepsilon>0$ קיימת פונקציה g רציפה אשר מתאפסת מחוץ לקטע חסום כך ש $\int\left|f(x)-g(x)\right|dm<\varepsilon$. נבנה סדרה g_n של פונקציות רציפות כאלו כך ש $\int\left|f(x)-g_n(x)\right|dm<\frac{1}{2^{n+1}}$. מכאן נובע כי

$$\int\left|f(x-h)-f(x)-\left(g_n(x-h)-g_n(x)\right)\right|dm$$
$$\le\int\left|f(x-h)-g_n(x-h)\right|dm+\int\left|f(x)-g_n(x)\right|dm<\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2^n}$$

עכשיו, נשים לב כי מכיוון ש $\left|g_n(x-h)-g_n(x)\right|<\left|g_n(x-h)\right|+\left|g_n(x)\right|$, עפ"י משפט ההתכנסות הנשלטת ורציפות הפונקציה g נובע כי

$$\lim_{h\to0}\int_{\mathbb{R}}\left|g_n(x-h)-g_n(x)\right|dm$$
$$=\int_{\mathbb{R}}\lim_{h\to0}\left|g_n(x-h)-g_n(x)\right|dm=\int_{\mathbb{R}}0=0$$

מכאן ש

$$\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}}\left|f(x-h)-f(x)\right|dm<\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}}\left|g_n(x-h)-g_n(x)\right|dm+\frac{1}{2^n}$$
$$=0+\frac{1}{2^n}$$

נשאיף את n לאינסוף ונקבל את תהתוצאה.

3. תנו דוגמא לסדרה של פונקציות אי- שליליות f_n השואפות לאפס נקודתית כך ש $\lim_{n\to\infty}\int f_n=0$ אבל לא קיימת פונקציה אינטגרבילית $f_n<g$ לכל n .

פתרון: ניקח את סדרת הפונקציות הבאות:

$$f_n=\begin{cases}\frac{1}{n} & n-1\le x\le n\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

קל לראות כי $f_n\to 0$ וגם כי $\int f_n=\frac{1}{n}\to 0$. אם $f_n<g$, אזי בהכרח $\int f_n<\int g$ לכל n .

מכאן ש $\int_{\mathbb{R}} gdm=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}} g1_{\{n-1\le x\le n\}}dm\ge\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}dm=\infty$.

4. הפעילו את למת פאטו עבור מידת לבג על הממשיים על הסדרות הבאות:

i. $1_{(n,n+1)}(x)$

ii. $1_{(n,\infty)}(x)$

iii. $n1_{\left(0,\frac{1}{n}\right)}(x)$

iv. $1+\operatorname{sgn}\left(\sin\left(\frac{2^n x}{2\pi}\right)\right)$

פתרון:

i. $\underline{\lim}\int 1_{(n,n+1)}(x)=m((\mathrm{n},\mathrm{n}+1))=1\ge\int\underline{\lim}1_{(n,n+1)}(x)=\int 0=0$

ii. $\underline{\lim}\int 1_{(n,\infty)}(x)=m((\mathrm{n},\infty))=\infty\ge\int\underline{\lim}1_{(n,\infty)}(x)=\int 0=0$

iii. $\underline{\lim}\int n1_{\left(0,\frac{1}{n}\right)}(x)=nm\left(\left(0,\frac{1}{n}\right)\right)=1\ge\int\underline{\lim}n1_{\left(0,\frac{1}{n}\right)}(x)=\int 0=0$

iv.

$$\int 1+\operatorname{sgn}\left(\sin\left(\frac{2^n x}{2\pi}\right)\right)=\int 0\cdot 1_{\left\{x:\sin\left(\frac{2^n x}{2\pi}\right)<0\right\}}+2\cdot 1_{\left\{x:\sin\left(\frac{2^n x}{2\pi}\right)>0\right\}}$$

$$=\int 2\cdot 1_{\left\{x:\sin\left(\frac{2^n x}{2\pi}\right)>0\right\}}=2m\left(\left\{x:\sin\left(\frac{2^n x}{2\pi}\right)>0\right\}\right)=2\cdot\infty=\infty$$

מצד שני,

מכיוון שלכל x

5. תהי $f\geq 0$ פונקציה מדידה לבג כך ש $\int fdm=\infty$. הראו שלכל $M>0$ קיימת פונקציה g כך ש $0\leq g\leq f$ המקיימת :
   i. $\int gdm>M$
   ii. g חסומה
   iii. לתומך של g מידה סופית.

פתרון: נסתכל על הפונקציה $g_n(x)=1_{[-n,n]\cap\{f\leq n\}}(x)f(x)$. קל לראות כי לכל $n\in\mathbb{N}$ g_n מקיימת את שני הסעיפים האחרונים. הסעיף הראשון נובע מההתכנסות המונוטונית.

6. תהי X קבוצה מדידה עם מידה סופית ותהי $f\in L^1(X,\mu)$ (אינטגרבילית ביחס ל μ) אי שלילית.
   הראו ש $\lim\limits_{\alpha\to 1-}\int\limits_X f^\alpha d\mu=\int\limits_X fd\mu$. האם התוצאה נכונה גם עבור $\alpha\to 1+$?
   פתרון: נגדיר $A=\{x:f(x)>1\}$. אזי, מכיוון ש $0<\alpha<1$ נובע כי $f^\alpha(x)\uparrow f(x)$ כאשר $\alpha\to 1$. כמו כן, על A^c נובע כי f^α נשלטת ע"י הפונקציה 1_{A^c} אשר אינטגרבילית כיוון שהמידה הינה סופית. מכאן שעפ"י משפט ההתכנסות המונוטונית של לבג ומשפט ההתכנסות הנשלטת נובע כי $\int\limits_X fd\mu=\lim\limits_{\alpha\to 1-}\int\limits_X f^\alpha d\mu=\lim\limits_{\alpha\to 1-}\left(\int\limits_{A^c} f^\alpha d\mu+\int\limits_A f^\alpha d\mu\right)$.

7. תהי $\phi(x)$ פונקציה המקיימת $\phi(x)=\phi(x+1)$ לכל $x\in\mathbb{R}$ ובנוסף $\int\limits_{[0,1]}\phi(x)dx<\infty$. נגדיר

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi(nx)}{n^2}$$

הראו ש f סופית כמעט בכל מקום.

פתרון: קל לראות כי $f(x)$ מחזורית 1, כלומר $f(x+1)=f(x)$. מכאן שמספיק להראות כי f סופית כב"מ על הקטע $[0,1]$. נשים לב כי

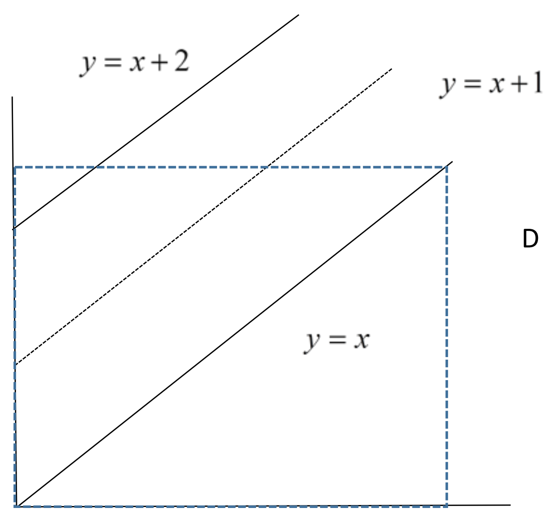
$$\int_{[0,1]} f(x)dm = \int_{[0,1]} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(nx)}{n^2} dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,1]} \frac{\phi(nx)}{n^2} dm$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,n]} \frac{\phi(x)}{n^3} dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,1]} \frac{\phi(x)}{n^2} dm < \infty$$

מכאן נובע כי f סופית כב"מ.

8. יהי $X = Y = \mathbb{R}$ ונסתכל על $\mathbb{R}^2$ ביחס לסיגמא אלגברה בורל. נגדיר את הפונקציה

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & x \ge 0 \text{ and } x \le y < x+1 \\ -1 & x \ge 0 \text{ and } x+1 \le y < x+2 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

הראו כי $\int\int f(x,y)m(dx)m(dy) \ne \int\int f(x,y)m(dy)m(dx)$. מדוע אין זו סתירה למשפט פוביני?



נחשב

$$h(y)=\int f(x,y)m(dx)=\begin{cases}0 & y<0\\ \int_0^y 1dm=y & 0\le y<1\\ \int_0^{y-1}-1dm+\int_{y-1}^{y}1dm=2-y & 1\le y<2\\ \int_{y-2}^{y-1}-1dm+\int_{y-1}^{y}1dm=0 & 2\le y<\infty\end{cases}$$

ולכן

$$\int\int f(x,y)m(dx)m(dy)=\int_{-\infty}^{\infty}h(y)dm=\int_0^1 ym(dy)+\int_1^2(2-y)m(dy)=1$$

מצד שני,

$$g(x)=\int f(x,y)m(dy)=\begin{cases}0 & x<0\\ \int_x^{x+1}1m(dy)+\int_{x+1}^{x+2}-1m(dy)=0 & x\ge 0\end{cases}$$

ולכן

$$\int\int f(x,y)m(dy)m(dx)=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)dm=\int_{-\infty}^{\infty}0dm=0$$

ומכאן ש

$$.1=\int\int f(x,y)m(dx)m(dy)\ne\int\int f(x,y)m(dy)m(dx)=0$$

על מנת להראות כי אין סתירה למשפט פוביני, נראה כי $\int_{\mathbb{R}^2}\left|f(x,y)\right|dm\times dm=\infty$. נחשב את $\int_D\left|f(x,y)\right|dm\times dm$ כאשר D_x הינו הריבוע בציור שצלעו באורך x . ברור כי אינטגרל כפול על הפונקציה הינו השטח של הריבוע D_x פחות שני המשולשים. כלומר, אם גודל הריבוע הוא x^2 אזי $\int_{D_x}\left|f(x,y)\right|dm\times dm=x^2-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{(x-2)^2}{2}\right)=2x-2$. עפ"י משפט ההתכנסות המונוטונית נובע כי $\int_{\mathbb{R}^2}\left|f(x,y)\right|dm\times dm=\lim_{x\to\infty}\int_{D_x}\left|f(x,y)\right|dm\times dm=\lim_{x\to\infty}2x-2=\infty$. מכאן כי תנאי משפט פוביני אינם מתקיימים ולכן אין סתירה.