פתרון תרגיל 11 – חשבון אינפיניטסימלי 2 למדעי המחשב

1. חשבו את האינטגרלים הכפולים הבאים:

(א) $\iint_D \frac{x^2}{1+y^2}dxdy$ כאשר D הוא המלבן $[0,1]\times[0,1]$

פתרון:

$$\iint_D \frac{x^2}{1+y^2}dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2}dy\right)dx = \int_0^1 [x^2\arctan y]_0^1 dx =$$

$$\int_0^1 x^2(\arctan 1 - \arctan 0)dx = \frac{\pi}{4}\int_0^1 x^2 dx = \frac{\pi}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{\pi}{12}}$$

(ב) $\iint_D \frac{\sin x}{x}dxdy$ כאשר $D=\{(x,y): 0\le y\le x,\ 0\le x\le \pi\}$

פתרון:

$$\iint_D \frac{\sin x}{x}dxdy = \int_0^\pi \left(\int_0^x \frac{\sin x}{x}dy\right)dx = \int_0^\pi \left[\frac{\sin x}{x}y\right]_0^x dx =$$

$$= \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\cdot x dx = \int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = \mathbf{2}$$

(ג) $\iint_D e^{-\frac{x}{y^2}}dxdy$ כאשר $D=\{(x,y): y^2\le x\le 2y^2,\ 0\le y\le 1\}$

פתרון:

$$\iint_D e^{-\frac{x}{y^2}}dxdy = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{2y^2} e^{-\frac{x}{y^2}}dx\right)dy = \int_0^1 \left[-y^2 e^{-\frac{x}{y^2}}\right]_{y^2}^{2y^2} dy =$$

$$\int_0^1 -y^2(e^{-2}-e^{-1})dy = (e^{-1}-e^{-2})\int_0^1 y^2 dy = (e^{-1}-e^{-2})\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{e^{-1}-e^{-2}}{3}}$$

2. חשבו את האינטגרלים הבאים בעזרת החלפת משתנים:

(א) $\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ כאשר $D=\{(x,y): 1\le x^2+y^2\le 4\}$. רמז: קואורדינטות פולאריות.

פתרון: נעבור לקואורדינטות פולריות: $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$. כזכור, $x^2+y^2=r^2$ והיעקוביאן הוא $J=r$. בקואורדינטות אלו, התחום הוא

$$D=\{(r\cos\theta, r\sin\theta): 1\le r^2\le 4,\ 0\le\theta\le 2\pi\} = \{(r\cos\theta, r\sin\theta): 1\le r\le 2,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$$

ולכן האינטגרל הוא

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{2\pi}\left(\int_1^2 e^{-r^2}\cdot|J|dr\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\int_1^2 re^{-r^2}dr\right)d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_1^2 d\theta = \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}(e^{-4}-e^{-1})d\theta = \boldsymbol{\pi(e^{-1}-e^{-4})}$$

(ב) $\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy$ כאשר $D=\{(x,y): x\geq 0,\ y\geq 0,\ 1\leq x+y\leq 2\}$. רמז: $u=x+y,\ v=x-y$.

פתרון: נעבור למשתנים חדשים: $u=x+y,\ v=x-y$.
אם נבודד את x ו־y נקבל: $x=\frac{u+v}{2},\ y=\frac{u-v}{2}$. לכן היעקוביאן הוא:

$$J=\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}$$

תחום האינטגרציה במשתנים החדשים הוא:

$$D=\{(x,y): x\geq 0,\ y\geq 0,\ 1\leq x+y\leq 2\} = \{(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}): \frac{u+v}{2}\geq 0,\ \frac{u-v}{2}\geq 0,\ 1\leq u\leq 2\}$$

$$=\{(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}): u+v\geq 0,\ u-v\geq 0,\ 1\leq u\leq 2\} = \{(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}): -u\leq v\leq u,\ 1\leq u\leq 2\}$$

ולכן האינטגרל הוא

$$\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy = \int_1^2\left(\int_{-u}^u e^{\frac{v}{u}}\cdot|J|dv\right)du = \int_1^2\left(\int_{-u}^u \frac{1}{2}e^{\frac{v}{u}}dv\right)du =$$

$$\int_1^2\left[\frac{u}{2}e^{\frac{v}{u}}\right]_{-u}^u du = \int_1^2 \frac{u}{2}(e-e^{-1})du = \frac{e-e^{-1}}{2}\left[\frac{u^2}{2}\right]_1^2 = \boldsymbol{\frac{3}{4}(e-e^{-1})}$$

3. חשבו את השטחים הבאים:

(א) שטח התחום החסום בין הגרפים של הפונקציות $y=x^2,\ y=x^3$ ברביע הראשון.
פתרון: התחום המבוקש הוא

$$D=\{(x,y): x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^3\leq y\leq x^2\} = \{(x,y): 0\leq x\leq 1,\ x^3\leq y\leq x^2\}$$

ושטחו ניתן לחישוב ע"י האינטגרל הכפול

$$S(D)=\iint_D dxdy = \int_0^1\left(\int_{x^3}^{x^2} dy\right)dx = \int_0^1 [y]_{x^3}^{x^2}dx =$$

$$\int_0^1 (x^2-x^3)dx = \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{3}-\frac{1}{4} = \boldsymbol{\frac{1}{12}}$$

(ב) שטח התחום החסום בין הישרים $y = 1,\ y = 3$ וההיפרבולות $xy = 1,\ xy = 4$.

פתרון: התחום המבוקש הוא

$$D = \{(x, y) : 1 \leq xy \leq 4,\ 1 \leq y \leq 3\} = \{(x, y) : \frac{1}{y} \leq x \leq \frac{4}{y},\ 1 \leq y \leq 3\}$$

ושטחו ניתן לחישוב ע"י האינטגרל הכפול

$$S(D) = \iint_D dxdy = \int_1^3 \left(\int_{\frac{1}{y}}^{\frac{4}{y}} dx \right) dy = \int_1^3 \left(\frac{4}{y} - \frac{1}{y} \right) dy =$$

$$\int_1^3 \frac{3}{y} dy = [3 \ln y]_1^3 = \mathbf{3 \ln 3}$$