

# תרגיל בית 5

## שאלה 1

נסתכל בתת-חבורה נורמלית של המספרים הרציונליים  $(\mathbb{Q}, +)$   $\triangleleft (\mathbb{Z}, +)$ .

א. הוכיחו כי בחבורת המנה  $G = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  הסדר של כל איבר הוא סופי.

ב. הוכיחו כי תת-החבורה של  $G$  שנוצרת על ידי המחלקות של  $\frac{1}{10}$  ו- $\frac{3}{8}$

היא ציקלית. כלומר יש להוכיח  $\langle \frac{1}{10} + \mathbb{Z}, \frac{3}{8} + \mathbb{Z} \rangle = \langle a + \mathbb{Z} \rangle$  עבור  $a \in \mathbb{Q}$

כלשהו.

ג. מהו הסדר של תת-החבורה מהסעיף הקודם? מהו האינדקס שלה ב- $G$ ?

## שאלה 2

א. תהי  $H \leq G$ . הראו ש- $Z(H) \cap H = Z(G) \cap H$ , ותנו דוגמה שבה זו הכלה אמיתית.

ב. בכל סעיף תנו דוגמה לחבורה  $G$  ולתת חבורה  $H \leq G$  המדגימה את הדרוש:

1.  $Z(H) \subset Z(G)$  (הכלה ממש)

2.  $Z(G) \subset Z(H)$

3.  $Z(H)$  אינו מוכל ב- $Z(G)$  ואינו מכיל אותו.

## שאלה 3

הוכיחו או הפריכו כל אחת מן הטענות הבאות. עבור הטענות הנכונות מצאו גרעין.

א. קיים אפימורפיזם מהחבורה  $S_{14}$  לחבורה מסדר 34.

ב. קיים אפימורפיזם  $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_{60}$ .

ג. קיים אפימורפיזם  $\varphi: \mathbb{Z}_{60} \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$ .

ד. קיים איזומורפיזם  $\varphi: D_6 \rightarrow U_{13}$ .

ה. קיים מונומורפיזם  $\varphi: A_4 \rightarrow S_5$ .

ו. קיים מונומורפיזם  $\varphi: \mathbb{Z}_{24} \rightarrow S_4$ .

#### שאלה 4

- א. הוכיחו: אם  $N \triangleleft G$  אזי  $Z(N) \triangleleft G$ .
- ב. מצאו תת חבורה מאינדקס 3 של  $S_4$ , והראו שהיא אינה נורמלית.

#### שאלה 5

- א. תנו דוגמה נגדית לטענה השגויה הבאה: אם  $A, B \triangleleft G$ , ו-  $G/A \cong B$ , אזי  $G/B \cong A$ .
- ב. נניח  $K \triangleleft G$  ו-  $G/K \cong \mathbb{Z}$ . הוכיחו שלכל  $n \in \mathbb{N}$  קיימת ב-  $G$  תת חבורה מאינדקס  $n$ .

#### שאלה 6

- בראו שבכל אחת מהחבורות  $\mathbb{Z}_6, S_3$  קיימת תת חבורה נורמלית שאיזומורפית ל-  $\mathbb{Z}_3$ , כך שהמנה איזומורפית ל-  $\mathbb{Z}_2$ . האם קיימת בשתייהן תת חבורה נורמלית שאיזומורפית ל-  $\mathbb{Z}_2$ ?

#### שאלה 7

- תהי  $G$  חבורה ו-  $N \triangleleft G$ . האם יתכן ש-  $N$  ו-  $G/N$  שתיהן אבליות, אבל  $G$  איננה כזאת?

#### שאלה 8

- א. תהי  $G$  חבורה עם תת חבורה  $H$  ותת-חבורות נורמליות  $N, N'$ . הוכיחו: אם  $N \cap H = N' \cap H$ , אזי  $(HN)/N \cong (HN')/N$ .
- ב. תהי  $G$  חבורה ו-  $N \triangleleft G$ . נניח ש-  $G/N$  ו-  $N$  אבליות. תהי  $H \leq G$  תת חבורה כלשהי. הוכיחו שקיימת  $K \triangleleft H$ , כך ש-  $H/K$  ו-  $K$  אבליות.

**בהצלחה!**