שיעור 1

הגדרה – פונקציה

יהיו D,B שתי קבוצות של מספרים ממשיים. פונקציה f מן הקבוצה D לקבוצה B הנה התאמה לכל מספר x ב D, מספר יחיד y ב B.

הקבוצה D נקראת תחום של הפונקציה f , והקבוצה B נקראת הטווח של הפונקציה f .

דוגמא

$f\left(x\right)=\sqrt{1-x}$ במקרה זה התחום של הפונקציה $D=\left\{x\le 1\right\}$.

סימון

פונקציה f שהתחום שלה הוא D והטווח שלה הוא B נסמן ע"י $f:D\to B$, בד"כ $B=\mathbb{R}$.

($\mathbb{R}$ - קבוצת כל המספרים הממשיים).

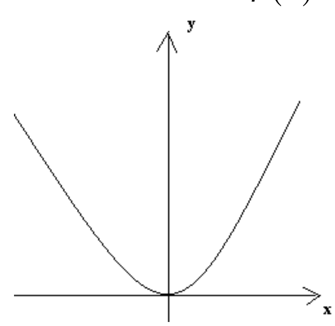
הזזת פונקציה

לכל פונקציה ניתן תיאור גרפי

גרף הפונקציה $g\left(x\right)=f\left(x+a\right)+c$ הוא גרף הפונקציה $f(x)$ לאחר הזזה של $|a|$ "צעדים" ימינה אם $a<0$ או $|a|$ "צעדים" שמאלה אם $a>0$ ו $|c|$ "צעדים" למטה אם $c<0$ או $|c|$ "צעדים" למעלה אם $c>0$.

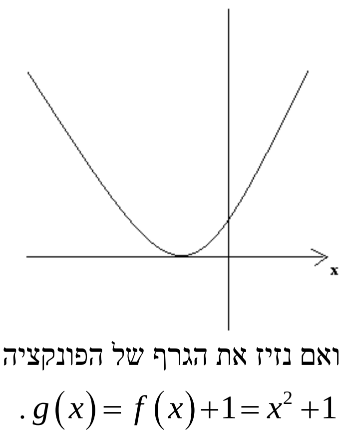
דוגמא

$f\left(x\right)=x^2$



נשים לב שאם נזיז את הגרף של הפונקציה $f\left(x\right)=x^2$ "צעד" אחד שמאלה נקבל את הגרף של הפונקציה

$g\left(x\right)=f\left(x+1\right)=\left(x+1\right)^2$

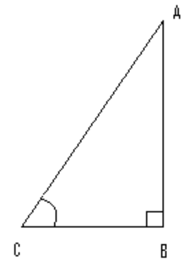


ואם נזיז את הגרף של הפונקציה $f\left(x\right)=x^2$ "צעד" אחד למעלה נקבל את הגרף של הפונקציה $g\left(x\right)=f\left(x\right)+1=x^2+1$.

פונקציות טריגונומטריות

פונקצית סינוס

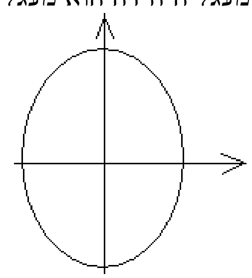
הגדרת פונקצית הסינוס במשולש ישר זווית.



בכל המשולשים ישרי זווית שאחת מזוויותיו החדות שוות ל x היחס בין הניצב מול הזווית x ליתר זהה (נובע מדמיון משולשים) נגדיר את $\sin x$ להיות יחס זה. מכיוון שניצב תמיד קטן מהיתר נקבל ש $\sin x < 1$.
בהגדרה של $\sin x$ x חייבת להיות זווית חדה ולכן יש צורך להרחיב את הגדרת הסינוס נעשה זאת בעזרת מעגל היחידה.

מעגל היחידה והרדיאן

מעגל היחידה הוא מעגל שרדיוסו 1 ומרכזו בראשית הצירים.



רדיאן הוא יחידת מידה של זווית.
זווית מרכזית במעגל היחידה המתאימה לקשת באורך α נקרת זווית בת α רדיאנים.
היקף מעגל שרדיוסו 1 הוא 2π ולכן הזווית המתאימה למעגל היא 2π.

מעגל שרדיוסו R

נשים לב שהיחס בין אורך הקשת l להיקף המעגל $2\pi R$ שווה ליחס שבין הזווית α וזווית המתאימה למעגל.

סה"כ נקבל ש $\frac{l}{2\pi R} = \frac{\alpha}{2\pi} \Rightarrow l = \alpha R$ ולכן אורך הקשת בת רדיאן אחד במעגל היחידה היא R ואורך הקשת בת x רדיאן במעגל בעל רדיוס R היא xR.

מעבר בין יחידות המידה- מעלות ורדיאנים

מכיוון שגודל הזווית במעלות המתאימה למעגל היא 360^0 וגודל הזווית ברדיאנים המתאימה למעגל היא 2π נקבל ש π רדיאנים שווה ל 180^0.

$\alpha = \frac{\pi\alpha^0}{180^0}$ רדיאנים

$$\alpha^0 = \frac{180^0\alpha}{\pi}$$

הקדמה להגדרת הפונקציות הטריגונומטריות בעזרת מעגל היחידה

עבור זווית α נעביר ישר שיוצר זווית α עם הכיוון החיובי של ציר ה x.
נסמן את נקודת החיתוך של הישר הנ"ל עם מעגל היחידה ב $A(x, y)$.

הגדרת סינוס בעזרת מעגל היחידה

הפונקציה המתאימה לכל זווית α את שיעור ה y של הנקודה A נקראת סינוס של α ומסומנת $f\left(\alpha\right)=\sin\alpha$.

<u>הגדרת קוסינוס בעזרת מעגל היחידה</u>

הפונקציה המתאימה לכל זווית α את שיעור ה x של הנקודה A נקראת קוסינוס של α ומסומנת $f\left(\alpha\right)=\cos\alpha$.

<u>הגדרת טנגנס בעזרת מעגל היחידה</u>

הפונקציה המתאימה לכל זווית α את היחס בין שיעור ה y של הנקודה A לשיעור ה x של הנקודה A נקראת טנגנס של α ומסומנת $f\left(\alpha\right)=\tan\alpha$.

<u>הגדרת קוטנגנס בעזרת מעגל היחידה</u>

הפונקציה המתאימה לכל זווית α את היחס בין שיעור ה x של הנקודה A לשיעור ה y של הנקודה A נקראת רוטנגנס של α ומסומנת $f\left(\alpha\right)=\cot\alpha$.

<u>הערה</u>

נובע ישירות מההגדרות ש $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

<u>תחומי ההגדרה והתמונות של הפונקציות הטריגונומטריות</u>

מכיוון שלכל זווית x מתאימה נקודה A כפי שרשמנו בהקדמה הפונקציות הטריגונומטריות $\sin x,\cos x$ מוגדרות לכל x .

מכיוון ששיעור ה y הגדול ביותר של הנקודה A הוא 1 והנמוך ביותר הוא -1 התמונה של $\sin x$ היא $\left[-1,1\right]$ ולכן היא פונקציה חסומה.

מכיוון ששיעור ה x הגדול ביותר של הנקודה A הוא 1 והנמוך ביותר הוא -1 התמונה של $\cos x$ היא $\left[-1,1\right]$ ולכן היא פונקציה חסומה.

מכיוון ש $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ נקבל שהפונקציה $\tan x$ מוגדרת רק כאשר $\cos x\neq 0$ ולכן תחום ההגדרה הוא $\left\{x\middle|x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k\right\}$.

מכיוון ש $\tan x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ נקבל שהפונקציה $\tan x$ מוגדרת רק כאשר $\sin x\neq 0$ ולכן תחום ההגדרה הוא $\left\{x\middle|x\neq\pi k\right\}$.

התמונה של מכיוון ש $\tan x,\cot x$ היא $\mathbb{R}$ ולכן הן לא פונקציות חסומות.

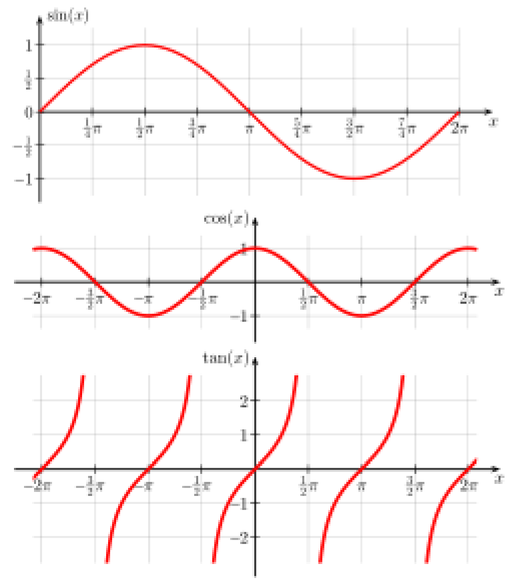
<u>מחזוריות הפונקציות הטריגונומטריות</u>

מכיוון שאם נוסיף לכל זווית α 2π רדיאנים נחזור לאותה נקודה A (שבהקדמה) נקבל ש $\sin\left(\alpha\pm 2\pi\right)=\sin\alpha,\cos\left(\alpha\pm 2\pi\right)=\cos\alpha$ ולכן הפונקציות $\sin\alpha,\cos\alpha$ מחזוריות עם מחזור 2π .

מכיוון ש $\dfrac{-}{+}=\dfrac{+}{-},\dfrac{-}{-}=\dfrac{+}{+}$ נקבל שהיחס בין y ל x של שיעורי הנקודה A שמתאימה לזווית α שווה ליחס בין y ל x של שיעורי הנקודה A שמתאימה לזווית $\alpha+\pi$ ואז $\tan\left(\alpha\pm\pi\right)=\tan\alpha$ ולכן הפונקציה $\tan\alpha$ מחזורית עם מחזור π .

באותו אופן הפונקציה $\cot\alpha$ מחזורית עם מחזור π .

<u>שרטוט הפונקציות הטריגונומטריות</u>

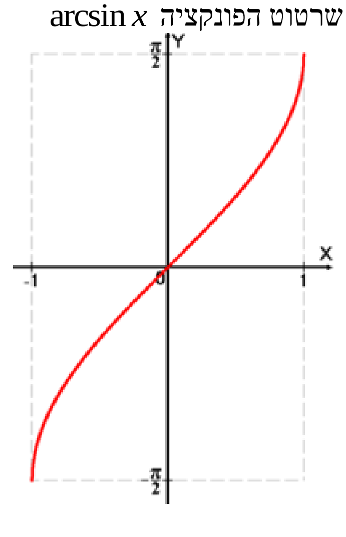


<u>**הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות**</u>

$\arcsin x$

הפונקציה $\sin x$ אינה חח"ע על כל הישר. אנחנו נצטמצם לקטע הסגור $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ בקטע זה $\sin x$ מונוטונית עולה ממש ולכן היא חח"ע. התמונה של $\sin x$ היא $[-1,1]$ ולכן הפונקציה $\sin x:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$ היא חח"ע ועל ויש לה הופכית נגדיר את הפונקציה ההופכית שלה להיות $\arcsin x:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ולכן תחום ההגדרה של $\arcsin x$ הוא $\{x|-1\le x\le 1\}$.

שרטוט הפונקציה $\arcsin x$

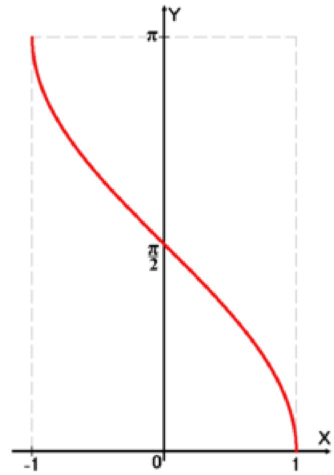


$\arccos x$

הפונקציה $\cos x$ אינה חח"ע על כל הישר. אנחנו נצטמצם לקטע הסגור $[0,\pi]$ בקטע זה $\cos x$ מונוטונית יורדת ממש ולכן היא חח"ע. התמונה של $\cos x$ היא $[-1,1]$ ולכן הפונקציה $\cos x:[0,\pi]\to[-1,1]$ היא

חח"ע ועל ויש לה הופכית נגדיר את הפונקציה ההופכית שלה להיות $\arccos x:[-1,1]\to[0,\pi]$ ולכן תחום ההגדרה של $\arccos x$ הוא $\{x|-1\le x\le 1\}$.

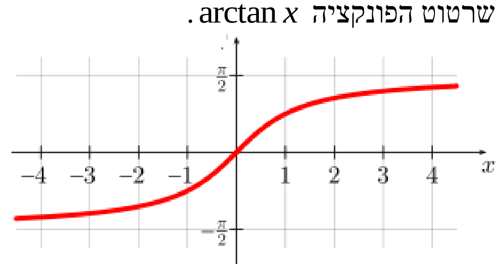
שרטוט הפונקציה $\arccos x$



$\arctan x$

הפונקציה $\tan x$ אינה חח"ע על כל הישר. אנחנו נצטמצם לקטע הפתוח $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ בקטע זה $\tan x$ מונוטונית עולה ממש ולכן היא חח"ע. התמונה של $\tan x$ היא $\mathbb{R}$ ולכן הפונקציה $\tan x:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ היא חח"ע ועל ויש לה הופכית נגדיר את הפונקציה ההופכית שלה להיות $\arctan x:\mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ ולכן $\arctan x$ מוגדרת לכל x ממשי.

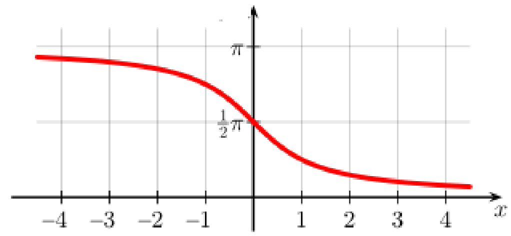
שרטוט הפונקציה $\arctan x$.



$\operatorname{arc}\cot x$

הפונקציה $\cot x$ אינה חח"ע על כל הישר. אנחנו נצטמצם לקטע הפתוח $(0,\pi)$ בקטע זה $\cot x$ מונוטונית יורדת ממש ולכן היא חח"ע. התמונה של $\cot x$ היא $\mathbb{R}$ ולכן הפונקציה $\cot x:(0,\pi)\to\mathbb{R}$ היא חח"ע ועל ויש לה הופכית נגדיר את הפונקציה ההופכית שלה להיות $\operatorname{arc}\cot x:\mathbb{R}\to(0,\pi)$ ולכן $\operatorname{arc}\cot x$ מוגדרת לכל x ממשי.

שרטוט הפונקציה $\operatorname{arc}\cot x$.



תרגיל

א. חשב ללא שימוש במחשבון את $\cos\arctan 2$.

ב. הוכח ש $\cos\arctan x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

פתרון

א.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x} \Rightarrow \tan^2 x = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \Rightarrow$$

$$\cos^2 x \tan^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} \Rightarrow \cos x = \sqrt{\frac{1}{1+\tan^2 x}}$$

$$\cos\arctan 2 = \sqrt{\frac{1}{1+\tan^2 \arctan 2}} = \sqrt{\frac{1}{1+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

ב.

$$\cos\arctan x = \sqrt{\frac{1}{1+\tan^2 \arctan x}} = \sqrt{\frac{1}{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$